Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Prof. Tanja Eisner

Leipzig, den 9. 7. 2015

Übungen zur Vorlesung

Funktionalanalysis II

Blatt 13

Tausend Wege führen zu Fehlern, zur Wahrheit führt nur einer.
J. J. Rousseau (1712-1778)

Aufgabe 1. (*Der Satz von Hille-Yosida: Ein Gegenbeispiel*)
Sei M_q der Multiplikator mit der Funktion $q(s) := is$ auf $X := C_0([0, \infty))$. Definiere

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} M_q & M_q \\ 0 & M_q \end{pmatrix}$$

mit $D(\mathcal{A}) := D(M_q) \times D(M_q)$ auf $\mathcal{X} := X \times X$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

a) $\mathcal{A}$ erfüllt $\|R(\lambda, \mathcal{A})\| \leq \frac{2}{\lambda}$ für alle $\lambda > 0$.

b) $\mathcal{A}$ ist *kein* Generator einer C_0-Halbgruppe.

Was ändert sich für $X := C_0(\mathbb{R})$?

Aufgabe 2. (*Sektorielle Operatoren*)

a) Sei M_q der Multiplikator mit der Funktion q auf einem Funktionenraum X. Zeigen Sie, dass M_q genau dann sektoriell ist, wenn $\overline{q(X)}$ in einem Sektor $\mathbb{C} \setminus \Sigma_\delta$ mit $\delta > \frac{\pi}{2}$ liegt. (Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass

$$\|R(\lambda, M_q)\| = \frac{1}{\operatorname{dist}(\lambda, q(X))}$$

für alle $\lambda \in \rho(M_q)$ gilt.)

b) Folgern Sie aus a), dass das Spektrum einer analytischen Halbgruppe eine beliebige abgeschlossene Menge sein kann, die in einem solchen Sektor liegt.

Die Übungsaufgaben werden in der Übung am Donnerstag, dem 16. 7. 2015 besprochen.