Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Prof. Tanja Eisner

Leipzig, den 3. 7. 2018

Übungen zur Vorlesung

Funktionalanalysis II

Blatt 12

Man darf nicht das, was uns unwahrscheinlich und unnatürlich erscheint, mit dem verwechseln, was absolut unmöglich ist.
CARL FRIEDRICH GAUSS (1777-1855)

Aufgabe 1. (*Der Satz von Hille-Yosida: Ein Gegenbeispiel*)
Sei M_q der Multiplikator mit der Funktion $q(s) := is$ auf $X := C_0([0, \infty))$. Definiere

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} M_q & M_q \\ 0 & M_q \end{pmatrix}$$

mit $D(\mathcal{A}) := D(M_q) \times D(M_q)$ auf $\mathcal{X} := X \times X$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

a) $\mathcal{A}$ erfüllt $\|R(\lambda, \mathcal{A})\| \leq \frac{2}{\lambda}$ für alle $\lambda > 0$.

b) $\mathcal{A}$ ist *kein* Generator einer C_0-Halbgruppe.

Was ändert sich für $X := C_0(\mathbb{R})$?

Aufgabe 2. (*Sektorielle Operatoren*)

a) Sei M_q der Multiplikator mit der Funktion q auf einem Funktionenraum X. Zeigen Sie, dass M_q genau dann sektoriell ist, wenn $\overline{q(X)}$ in einem Sektor $\mathbb{C} \setminus \Sigma_\delta$ mit $\delta > \frac{\pi}{2}$ liegt. (Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass

$$\|R(\lambda, M_q)\| = \frac{1}{\operatorname{dist}(\lambda, q(X))}$$

für alle $\lambda \in \rho(M_q)$ gilt.)

b) Folgern Sie aus a), dass das Spektrum einer analytischen Halbgruppe eine beliebige abgeschlossene Menge sein kann, die in einem solchen Sektor liegt.

Die Übungsaufgaben werden in der Übung am Montag, dem 9. 7. 2018 besprochen.