Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Prof. Tanja Eisner

Leipzig, den 2. 7. 2015

Übungen zur Vorlesung

Funktionalanalysis II

Blatt 12

Man darf nicht das, was uns unwahrscheinlich und unnatürlich erscheint, mit dem verwechseln, was absolut unmöglich ist.
Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Aufgabe 1. (*Generator der Produkthalbgruppe*)
Sei X ein Banachraum und seien $(T(t))_{t\geq 0}$ und $(S(t))_{t\geq 0}$ zwei C_0-Halbgruppen auf X mit Generatoren $(A, D(A))$ bzw. $(B, D(B))$, so dass $T(t)S(t) = S(t)T(t)$ für jedes $t \geq 0$. Sei $(C, D(C))$ der Generator der Produkthalbgruppe $(U(t))_{t\geq 0}$ definiert durch $U(t) := T(t)S(t)$ (siehe Blatt 10, Aufgabe 1). Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

a) $D(A) \cap D(B) \subset D(C)$ und $Cx = Ax + Bx$ für jedes $x \in D(A) \cap D(B)$. (Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass $D(A)$ und $D(B)$ beide $T(t)$- und $S(t)$-invariant sind.)

b) $D(A)\cap D(B)$ ist dicht in X. (Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass für große $\lambda \in \mathbb{R}$ die Resolventen $R(\lambda, A)$ und $R(\lambda, B)$ kommutieren. Folgern Sie daraus, dass $R(\lambda, A)R(\lambda, B)X \subset D(A) \cap D(B)$, und zeigen Sie, dass $R(\lambda, A)R(\lambda, B)X$ dicht in X ist.)

Aufgabe 2. (*Halbgruppen vs. Gruppen*)
Man sagt, dass man eine C_0-Halbgruppe $(T(t))_{t\geq 0}$ auf einem Banachraum X in eine C_0-Gruppe einbetten kann, wenn für eine C_0-Gruppe $(S(t))_{t\in\mathbb{R}}$ auf X die Gleichheit $T(t) = S(t)$ für alle $t \geq 0$ gilt. Zeigen Sie, dass für eine C_0-Halbgruppe $(T(\cdot))_{t\geq 0}$ die folgenden Aussagen equivalent sind.

a) $T(t)$ ist invertierbar für ein $t > 0$.

b) $T(t)$ ist invertierbar für alle $t > 0$.

c) Man kann $(T(t))_{t\geq 0}$ in eine C_0-Gruppe einbetten.

Geben Sie Beispiele von einbettbaren und nicht einbettbaren Halbgruppen.

Die Übungsaufgaben werden in der Übung am Donnerstag, dem 9. 7. 2015 besprochen.