Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Prof. Tanja Eisner

Leipzig, den 26. 6. 2018

Übungen zur Vorlesung

Funktionalanalysis II

Blatt 11

Eine mathematische Wahrheit ist an sich weder einfach noch kompliziert, sie ist.
Emile Lemoine (1840-1912)

Aufgabe 1. (*Spektrum von unbeschränkten Operatoren*)
Für $X := C[0,1]$ definiere

$$Af := f' \text{ auf } D(A) := C^1[0,1]$$

und

$$Bf := f' \text{ auf } D(B) := \{f \in C^1[0,1] : f(1) = 0\}.$$

Zeigen Sie, dass $\sigma(A) = \mathbb{C}$ und $\sigma(B) = \emptyset$ gelten, und bestimmen Sie die Resolvente von B.

Aufgabe 2. (*Multiplikatoren*)

a) Eine Multiplikatorhalbgruppe $T(\cdot)$ auf $L^\infty(\mathbb{R})$ oder l^∞ ist genau dann stark stetig, wenn sie normstetig ist.

b) Sei $X := C_0(\mathbb{C})$, M ein Multiplikator mit $g \in C(\mathbb{C})$, d.h., $Mf = gf$, mit dem Definitionsbereich

$$D(M) := \{f \in X : gf \in X\}.$$

Zeigen Sie, dass M abgeschlossen ist, und berechnen Sie sein Spektrum und die Resolvente. Was ändert sich, wenn man $C_0(\mathbb{C})$ durch $C_0(\Omega)$ für einen lokalkompakten Raum Ω ersetzt, wobei

$$C_0(\Omega) := \{f \in C(\Omega) : \forall \varepsilon > 0 \ \exists K \subset \Omega \text{ kompakt mit } |f(s)| < \varepsilon \ \forall s \notin K\}?$$

Folgere insbesondere, dass jede agbeschlossene Menge $\sigma \subset \mathbb{C}$ als das Spektrum eines agbeschlossenen Operators vorkommen kann.

Aufgabe 3. (*Generatoren von inversen und ähnlichen Halgruppen*)

a) Sei $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ eine C_0-Gruppe mit Generator $(A, D(A))$ auf einem Banachraum X. Zeigen Sie, dass für jedes $x \in D(A)$ der volle Orbit

$$t \mapsto T(t)x, \quad \mathbb{R} \to X$$

differenzierbar ist, und bestimmen Sie seine Ableitung für $t < 0$. Bestimmen Sie weiterhin den Generator der inversen Halbgruppe $(S(t))_{t\geq 0}$ mit $S(t) := (T(t))^{-1} = T(-t)$.

b) Seien X, Y zwei Banachräume, $T(\cdot)$ eine C_0-Halbgruppe mit Generator $(A, D(A))$ auf X und $V \in L(X, Y)$ invertierbar. Bestimmen Sie den Generator der Halgruppe $(S(t))_{t\geq 0}$ auf Y definiert durch $S(t) := VT(t)V^{-1}$.

Die Übungsaufgaben werden in der Übung am Montag, dem 2. 7. 2018 besprochen.