Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Prof. Tanja Eisner/ Prof. Konrad Schmüdgen

Leipzig, den 18. 4. 2014

Übungen zur Vorlesung

Mathematik für Physiker IV

Blatt 11

Achtung: Am Donnerstag 19.6 findet eine Vorlesung statt Übung statt.

Aufgabe 1. (*Operatornormen von Matrizen, 4 Punkte*)

1) Sei $X = \mathbb{C}^d$ versehen mit der Supremumsnorm $\|x\|_\infty := \max_{j=1,\ldots,d} |x_j|$ und sei $T \in L(X)$ gegeben durch eine Matrix $(a_{ij}) \in M_{d\times d}$. Zeigen Sie, dass die zugehörige Operatornorm von T gleich der sogenannten *Zeilensummennorm* der Matrix ist, d.h.,

$$\|T\| = \max_{i\in\{1,\ldots,d\}} (|a_{i,1}| + \ldots + |a_{i,d}|).$$

2) Zeigen Sie, dass man die Operatornorm, die zur l^1-Norm $\|x\|_1 := \sum_{j=1}^d |x_j|$ auf $\mathbb{C}^d$ gehört, mit der *Spaltensummennorm* der Matrix übereinstimmt, d.h.,

$$\|T\| = \max_{j\in\{1,\ldots,d\}} (|a_{1,j}| + \ldots + |a_{d,j}|).$$

Aufgabe 2. (*Links- und Rechtsshifts, Volterraoperator, 4 Punkte + 2 Extrapunkte*)

1) Sei $X = l^2$ und definiere den Linksshift T_l und den Rechtsshift T_r auf X durch

$$\begin{aligned} T_r(t_1, t_2, t_3, \ldots) &:= (0, t_1, t_2, \ldots), \\ T_l(t_1, t_2, t_3, \ldots) &:= (t_2, t_3, t_4, \ldots). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass T_r und T_l lineare beschränkte Operatoren auf X mit $\|T_l\| = \|T_r\| = 1$ sind.

2*) Sei $X = C[0, 1]$ versehen mit der Supremumnorm und betrachte den *Volterraoperator* V definiert durch

$$(Vf)(s) := \int_0^s f(t)\, dt, \qquad f \in X,\ s \in [0, 1].$$

Zeigen Sie, dass V ein linearer beschränkter Operator auf X ist und berechnen Sie seine Norm.

Abgabe der Übungsaufgaben erfolgt in der Vorlesung am Mittwoch, dem 25. 5. 2014.

Mathematics Institute
University of Leipzig
Prof. Tanja Eisner/ Prof. Konrad Schmüdgen

Leipzig, 18. 4. 2014

Exercises to the lecture

Mathematics for Physicists IV

Sheet 11

Attention: There will be a lecture instead of the exercise class on Thursday 19.6.

Exercise 1. (*Operator norms of matrices, 4 points*)

1) Consider $X = \mathbb{C}^d$ endowed with the supremum norm $\|x\|_\infty := \max_{j=1,\ldots,d} |x_j|$ and let $T \in L(X)$ be given by a matrix $(a_{ij}) \in M_{d\times d}$. Show that the corresponding operator norm of T equals the so-called *row sum norm* of the matrix A:

$$\|T\| = \max_{i\in\{1,\ldots,d\}} (|a_{i,1}| + \ldots + |a_{i,d}|).$$

2) Show that the operator norm of T corresponding to the l^1 norm $\|x\|_1 := \sum_{j=1}^d |x_j|$ on $\mathbb{C}^d$ equals the *column sum norm* of the matrix A, i.e.,

$$\|T\| = \max_{j\in\{1,\ldots,d\}} (|a_{1,j}| + \ldots + |a_{d,j}|).$$

Exercise 2. (*Left and right shifts, Volterra operator, 4 points + 2 extra points*)

1) Consider $X = l^2$ and define the left shift T_l and the right shift operator T_r on X by

$$\begin{aligned} T_r(t_1, t_2, t_3, \ldots) &:= (0, t_1, t_2, \ldots), \\ T_l(t_1, t_2, t_3, \ldots) &:= (t_2, t_3, t_4, \ldots). \end{aligned}$$

Show that T_r and T_l are linear bounded operators on X with $\|T_l\| = \|T_r\| = 1$.

2*) Consider $X = C[0, 1]$ with the supremum norm and the *Volterra operator* V defined by

$$(Vf)(s) := \int_0^s f(t)\,dt, \qquad f \in X,\ s \in [0, 1].$$

Show that V is a linear bounded operator on X and compute its norm.

Handing the exercises in will take place in the lecture on Wednesday, 25. 5. 2014.