Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Prof. Tanja Eisner

Leipzig, den 9. 4. 2014

Übungen zur Vorlesung

Mathematik für Physiker IV

Blatt 1

Aufgabe 1. (*Metrik, Norm, Skalarprodukt, 4 Punkte*)

1) Sei (M, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass d eine stetige Funktion ist, d.h.,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \lim_{n\to\infty} y_n = b \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(a, b).$$

Folgern Sie daraus, dass die Norm in einem normierten Vektorraum stetig ist.

2) Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Vektorraum mit Skalarprodukt. Zeigen Sie analog zu 1), dass das Skalarprodukt stetig ist.

Aufgabe 2. (*Offene/abgeschlossene Mengen, 4 Punkte*)

1) Seien (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$. Dann gilt

$$A \text{ ist abgeschlossen} \quad \Longleftrightarrow \quad X \setminus A \text{ ist offen.}$$

2) Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum und $Y \subset H$ ein linearer Teilraum. Dann ist $(Y, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ selbst ein Hilbertraum dann und genau dann, wenn Y abgeschlossen ist.

Aufgabe 3. (*Separabilität, 4 Punkte*)

1) Zeigen Sie, dass l^2 separabel ist.

2) Zeigen Sie, dass der Raum $C[0, 1]$ aller stetigen Funktionen auf $[0, 1]$ mit dem Skalarprodukt gegeben durch

$$\langle f, g\rangle := \int_0^1 f(s)\overline{g(s)}\, ds$$

separabel ist. (Hinweis: Sie können gleichmäßige Stetigkeit oder den Satz von Weierstrass benutzen, ohne ihn zu beweisen.)

Abgabe der Übungsaufgaben erfolgt in der Übung am Mittwoch, dem 16. 4. 2014.

Mathematics Institute
University of Leipzig
Prof. Tanja Eisner

Leipzig, 9. 4. 2014

Exercises to the lecture

Mathematics for Physicists IV

Sheet 1

Exercise 1. (*Metric, norm, scalar product, 4 points*)

1) Let (M, d) be a metric space. Show that d is a continuout function, i.e.,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim_{n\to\infty} y_n = b \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(a, b).$$

   Deduce that the norm in a normed vector space is continuous.

2) Let $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ be a vector space with scalar product. Show analogously to 1) that the scalar produkt is continuous.

Exercise 2. (*Open/closed sets, 4 points*)

1) Let (X, d) be a metric space and $A \subset X$. Then

$$A \text{ is closed} \quad \Longleftrightarrow \quad X \setminus A \text{ is open.}$$

2) Let $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ be a Hilbert space and $Y \subset H$ a linear subspace. Then $(Y, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ is itself a Hilbert space if and only if Y is closed.

Exercise 3. (*Separability, 4 points*)

1) Show that l^2 is separable.

2) Show that the space $C[0, 1]$ of all continuous functions on $[0, 1]$ with the scalar product given by

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(s)\overline{g(s)}\, ds$$

   is separable. (Hint: You can use uniform continuity or the Weierstrass theorem without proving it.)

Handing the exercises in will take place in the exercise class on Wednesday, 16. 4. 2014.