Notiztitel 31.01.2019

ZZ.: f konvex ~~konkav~~ $\Longleftrightarrow$ $f''(x) \geq 0$ ($\leq$) $\forall x \in I$.

konkav

Beweis: Wir zeigen es für konvexe Fkten ($g := -f$ für konkave).

$\Leftarrow$ Sei $f'' \geq 0$ in I.

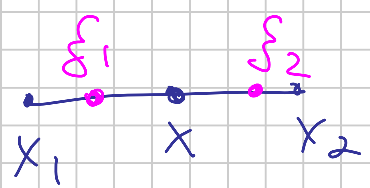
Satz 2.6: $f' \nearrow$ in I.

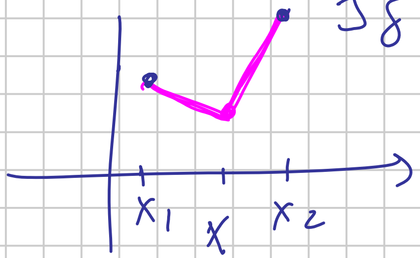
Seien $x_1, x_2 \in I$, $t \in (0,1)$, OBdA $x_1 < x_2$ (Warum?)

Betr. $x := tx_1 + (1-t)x_2 \in (x_1, x_2)$

$\dots \leq x \leq tx_2 + (1-t)x_2 = x_2$

MWS (zweimal):





$\exists \xi_1 \in (x_1, x) \ \exists \xi_2 \in (x, x_2)$:

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2) = \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$$

da $f' \nearrow$ und $\xi_2 > \xi_1$

Da $x - x_1 = (t-1)x_1 + (1-t)x_2 = (1-t)(x_2-x_1)$

$x_2 - x = t x_2 - t x_1 = t(x_2-x_1)$

haben wir

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{(1-t)\cancel{(x_2-x_1)}} \leq \frac{f(x_2)-f(x)}{t\,\cancel{(x_2-x_1)}},$$

(da >0)

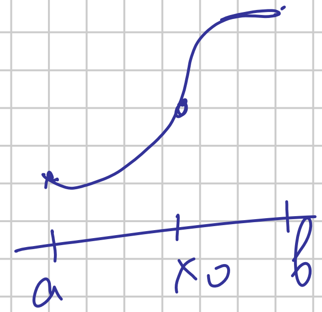
d.h.,

$$\cancel{t f(x)} - t f(x_1) \leq (1-t) f(x_2) - \cancel{(1-t) f(x)}$$

$$f(x) \leq t f(x_1) + (1-t) f(x_2)$$

"∎"

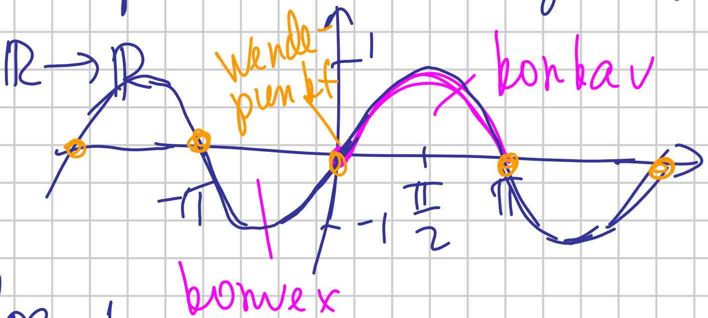
$\Rightarrow$ Hörsaalübung



Bem. Wenn f konv. in $[a, x_0]$ und konkav in $[x_0, b]$ (oder umgekehrt), heißt x_0 Wendepunkt

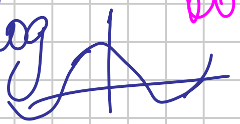
(dann gilt: $f''(x_0) = 0$ wegen Satz 2.12).

Bsp $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



$\sin'' = -\sin \begin{cases} < 0 & \text{in } (0, \pi) \\ > 0 & \text{in } (-\pi, 0) \end{cases}$

cos: analog



Anwendungen: wichtige Ungleichungen.

Lemma 2.13 (Ungleichung von Jensen)

Sei $f: I \to \mathbb{R}$ $\boxed{\text{konv}}$ (I Intervall), $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$ ($n \geq 2$), $t_1, \dots, t_n > 0$ mit $t_1 + \dots + t_n = 1$.

Dann gilt:

$$\boxed{f(t_1 x_1 + \dots + t_n x_n) \leq t_1 f(x_1) + \dots + t_n f(x_n).}$$

Wenn f streng konv. ist, gilt „$<$", sobald $x_1 = \dots = x_n$ nicht gilt.

Beweis: Induktion nach n: $n = 2$: klar (Def.)

$n \to n+1$: seien $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$, $t_1, \dots, t_n, t_{n+1}$ gegeben

Def. $t := t_1 + \dots + t_n \in (0,1)$,

$$x := \frac{t_1 x_1 + \dots + t_n x_n}{t} = \frac{t_1}{t} x_1 + \dots + \frac{t_n}{t} x_n$$

>0 mit $\Sigma = 1$

IV: $$f(\underbrace{t_1 x_1 + \dots + t_n x_n}_{t x} + t_{n+1} x_{n+1}) \overset{f \text{ konv}}{\leq} t f(x) + t_{n+1} f(x_{n+1})$$

$>0, \Sigma = 1$

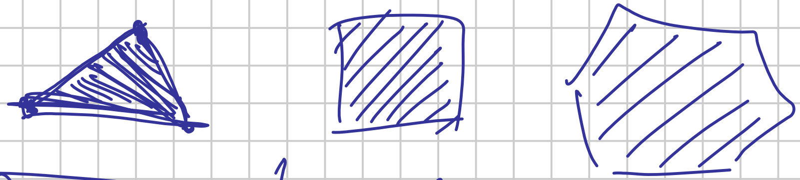
$$= t f\left(\frac{t_1}{t} x_1 + \dots + \frac{t_n}{t} x_n\right) + t_{n+1} f(x_{n+1})$$

$$\overset{IV}{\leq} \cancel{t} \cdot \left(\frac{t_1}{\cancel{t}} f(x_1) + \dots + \frac{t_n}{\cancel{t}} f(x_n)\right) + t_{n+1} f(x_{n+1})$$

$$= t_1 f(x_1) + \dots + t_{n+1} f(x_{n+1}) \qquad \blacksquare$$

Zusatz: Ü

Bem.: Ausdrücke der Form $t_1 x_1 + \dots + t_n x_n$ für $t_1, \dots, t_n \geq 0$, $t_1 + \dots + t_n = 1$ heißen Konvexkombinationen von $x_1, \dots, x_n$



$\boxed{\text{Satz 2.14}}$ (Ungl. zwischen dem gewichteten arithm. und geom. Mittel)

Seien $x_1, \dots, x_n > 0$, $t_1, \dots, t_n > 0$ mit $t_1 + \dots + t_n = 1$

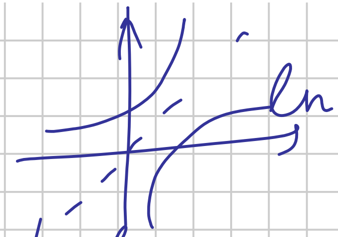
Dann gilt: $\boxed{x_1^{t_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{t_n} \le t_1 x_1 + \dots + t_n x_n}$ (*)

(insb.: $\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \le \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$)

Außerdem gilt „=“ $\Leftrightarrow$ $x_1 = \dots = x_n$

Beweis (Vorausges., $\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}}$)

Da $\ln'' x = -\frac{1}{x^2} < 0$, ist $\ln$ konkav



Jensen: $\ln(t_1 x_1 + \ldots + t_n x_n) \geq t_1 \ln x_1 + \ldots + t_n \ln x_n$.

$(x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_n$ wie oben$)$

Anwendung der Exp' Fkt:

$$t_1 x_1 + \ldots + t_n x_n \geq \underbrace{e^{t_1 \ln x_1}}_{= x_1^{t_1}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{e^{t_n \ln x_n}}_{x_n^{t_n}}$$

exp ist ↗

$$= x_1^{t_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{t_n}.$$

Da $\ln$ streng konkav ist $(\ln'' < 0)$, gilt:

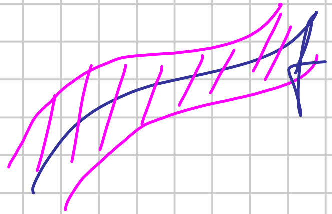
„$=$" $\iff x_1 = \ldots = x_n$. (in Jensen)

$\blacksquare$

Mehr wichtige Ungl. (von Hölder, Minkowski, Cauchy-Schwarz) kommen im SS.

Mehr Bsp von diff'baren Fkt'en: Grenzfkt und Potenzreihen

Erinnere: $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{gl.} f$ in D, wenn

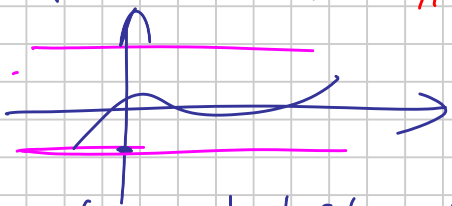


$\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\geq N\ \underbrace{\forall x\in D\ |f_n(x)-f(x)|\leq\varepsilon}_{\|f_n-f\|_\infty\leq\varepsilon}$

Notation: $\|f\|_\infty := \sup_{x\in D} |f(x)|$ (wenn endlich)

"Supremumsnorm von f" – mehr im SS

– misst die maximale Abweichung von der Nullfkt.



Beobachtung (Cauchykrit. für gleichm. konv.)

(f_n) konv. gleichm. in D $\Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : \forall n,m \geq N \; \underbrace{\forall x \in D \; |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon}_{\|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon}$

Satz 2.15 (Diff'barkeit der Grenzfkt)

Seien $f_1, f_2, \ldots : [a,b] \to \mathbb{R}$ diff'bar, $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Dann gilt die Implikation:

$$\boxed{\left.\begin{aligned} f_n &\xrightarrow[n\to\infty]{\text{gl.}} f \\ f_n' &\xrightarrow[n\to\infty]{\text{gl.}} g \end{aligned}\right\} \implies \begin{aligned} &f \text{ ist diff'bar} \\ &\text{und} \\ &f' = g \end{aligned}},$$

d.h., $\boxed{\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'}$, d.h., man kann den Limes mit der Abl. vertauschen

Beweis: Sei $x_0 \in [a,b]$. ZZ:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \longrightarrow g(x_0)$$

Idee: „3ε-Argument"

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Es gilt $\forall n \; \forall x \neq x_0$

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - g(x_0)\right| \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \underbrace{\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - \frac{f_n(x)-f_n(x_0)}{x-x_0}\right|}_{=:\mathrm{I}}$$
$$+ \underbrace{\left|\frac{f_n(x)-f_n(x_0)}{x-x_0} - f_n'(x_0)\right|}_{=:\mathrm{II}} + \underbrace{\left|f_n'(x_0) - g(x_0)\right|}_{=:\mathrm{III}}$$

Term III: Da gleichm. Konv. punktw. Konv. impliziert,

$\exists N_1 : \forall n \geq N_1 \quad |\mathrm{III}| < \varepsilon$

$\forall x \neq x_0$, da unabh. von x.

<u>Term I.</u> Beobachtung: $\forall x \neq x_0$ gilt

$$\left| \frac{f_m(x) - f_m(x_0)}{x - x_0} - \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} \right| = \left| \frac{(f_m - f_n)(x) - (f_m - f_n)(x_0)}{x - x_0} \right|$$

$$= \left| (f_m - f_n)'(\xi) \right| = \left| f_m'(\xi) - f_n'(\xi) \right| \leq \underbrace{\| f_m' - f_n' \|_\infty}_{\text{unabh. von } x\text{!}}$$

MWS: $\exists \xi$ zw. x und x_0

$$\xrightarrow[n, m \to \infty]{} 0 \quad \text{unabh. von } x$$

(Cauchykrit. für gleichm. Konv.

D.h., $\exists N_2 : \forall n \geq N_2 \quad \forall x \neq x_0 \quad \forall m \geq N_2$

$$\underbrace{\left| \frac{f_m(x) - f_m(x_0)}{x - x_0} - \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} \right| \leq \varepsilon}_{m \to \infty:}$$

$$\underbrace{\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} \right| \leq \varepsilon}_{|\mathrm{I}| \leq \varepsilon.}$$

Sei jetzt $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ fest.

Dann gilt für dieses n:

$$\forall x \neq x_0 \quad |\mathrm{I}| + |\mathrm{III}| < 2\varepsilon.$$

<u>Term II</u> Für dieses n gilt:

$$|II| = \left| \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} - f_n'(x_0) \right| \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$$ Def. von f_n'.

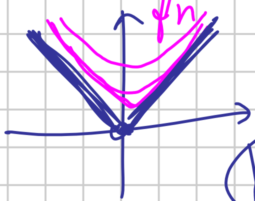
d.h., $\exists \delta > 0 : \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \quad |II| < \varepsilon$ und

damit $\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - g(x_0) \right| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon$. ∎

(Trick also: wähle zuerst n und dann ein δ dazu.)

Bem. 1) Man kann $f_n' \xrightarrow{gl.} g$ nicht weglassen:

$\boxed{\text{Bsp}}$

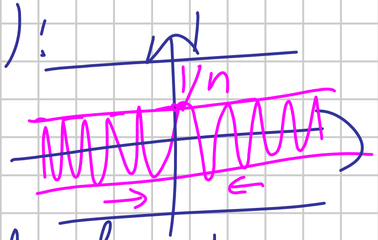


$f := |\cdot|$, $f_n(x) := \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$

Hörsaalübung: • $f_n \xrightarrow{gl.} f$ • f_n diff'bar (sogar C^∞!)

2) Auch wenn $f_n \xrightarrow{gl.} f$, $\forall f_n$ und f diff'bar

$\not\Rightarrow f_n' \to f'$ (sogar punktweise)!



$\boxed{\text{Bsp}}$ $f := 0$, $f_n(x) := \frac{1}{n} \sin(nx)$

$\|f_n - f\|_\infty = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, d.h., $f_n \overset{gl}{\to} f$;

f und alle f_n sogar C^∞, aber $f_n' \not\to f'$:

$f_n'(0) = \cos(n0) = 1 \not\to 0$.

3) Man kann sogar $f_n \overset{gl}{\to} f$ durch „$(f_n(x_0))$ konv. für ein $x_0 \in I$" ersetzen. Man zeigt dafür zuerst

$$\left.\begin{array}{l}(f_n(x_0)) \text{ konv. für ein } x_0 \\ (f_n') \text{ konv. gleichm.}\end{array}\right\} \Rightarrow (f_n) \text{ konv. gleichm.}$$

Hörsaalübung

und wendet Satz 2.15 an.

Folgerung 2.16 (Diff'keit von Funktionenreihen)

Seien $f_1, f_2, \ldots : [a,b] \to \mathbb{R}$ diff'bar s.d. die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n'$$

gleichm. konvergieren. Dann ist $f := \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ diff'bar mit

$$f' = \boxed{\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'}$$

(d.h., man kann $\sum_{n=1}^{\infty}$ mit der Ableitung vertauschen bzw. gliedweise differenzieren.)

<u>Beweis</u> folgt sofort aus dem Satz 2.15 für $S_N := \sum_{n=1}^{N} f_n$

und $s_N' = \sum_{n=1}^{N} f_n'$.

Bem. Wie oben kann man gleichm. Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ durch Konvergenz in einem Punkt ersetzen, und gleichm. Konv. folgt automatisch. $\blacksquare$

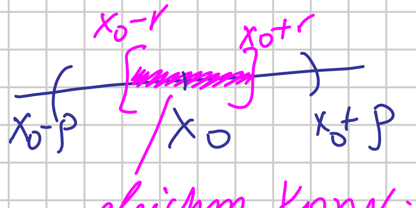
Folgerung 2.17 (Diff'keit von Potenzreihen)
Sei $p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho(x) \neq 0$ (d.h., $\rho(x) \in (0,\infty]$). Dann ist p diff'bar in $(x_0-\rho, x_0+\rho)$ (bzw. in $\mathbb{R}$, wenn $\rho = \infty$) und

$$\boxed{\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}}$$

(d.h., man kann p gliedweise differenzieren).

insbesondere ist P eine C^∞-Funktion in $(x_0-\rho, x_0+\rho)$.

<u>Beweis</u> Sei $r \in (0, \rho(P))$. Nach Satz III.3.4 konv. P <u>gleichm.</u> in $[x_0-r, x_0+r]$.



Beobachtung: $\rho\left(\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (\cdot - x_0)^{n-1}\right) = \rho(P)$, denn

- $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$ konv. $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n}$ konv.
- $\sqrt[n]{n|a_n|} = \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1} \cdot \sqrt[n]{|a_n|}$ (erinnere: $\rho(P) = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}$).

Satz II.3.4.

Also konv. beide Reihen gleichm. in $[x_0-r, x_0+r]$.

Der Rest folgt aus Folgerung 2.16. ∎

$\boxed{\text{Bsp. 2.18}}$ 1) $(e^x)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)' \underset{\text{konv. Radius} = \infty}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$, d.h., $\boxed{(e^x)' = e^x}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

2) Ableitung der Umkehrfkt $\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}$:

$$(\ln y)' = \frac{1}{e^x}\Big|_{x \text{ mit } e^x = y} = \frac{1}{y},$$

d.h., $\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}}$ $\forall x > 0$

3) Für die Sinus- und Kosinusreihen gilt

$$\boxed{\begin{aligned}(\sin x)' &= \cos x\\ (\cos x)' &= -\sin x\end{aligned}}:$$

$$(\sin x)' = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right)' \underset{\rho = \infty \text{ und Folgerung 2.17}}{=} 1 - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{4!} - \dots = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \dots = \cos x$$

$(\cos x)'$ analog.

4) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ ist die Fkt $\begin{cases} f(x) = x^\alpha \\ f: (0,\infty) \to \mathbb{R} \end{cases}$ diff'bar mit

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' \overset{\text{Kettenregel}}{=} e^{\alpha \ln x} \cdot \underbrace{(\alpha \ln x)'}_{\alpha \cdot \frac{1}{x}} = x^\alpha \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

$$\boxed{(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \ \forall x > 0.$$

5) Wichtige Grenzwerte (ggf. nochmals):

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}:}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} \underset{\text{Typ }\frac{\infty}{\infty}\text{: L'Hospital}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{n x^{n-1}}{e^x} = n \lim_{x\to\infty} \frac{x^{n-1}}{e^x} = \ldots \underset{\text{Induktion}}{=} n! \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

Analog: $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^a}{e^x} = 0 \quad \forall a \geq 0}$ (für $\forall a < 0$ auch – warum?)

$\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^n}{x} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}}$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^n}{x} \underset{\text{Typ } \frac{\infty}{\infty},\ \text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{n(\ln x)^{n-1} \cdot \frac{1}{x}}{1} = n \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^{n-1}}{x}$$

$$\underset{\text{induktion}}{=} \dots = n! \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Analog: $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^a}{x^b} = 0 \quad \forall a, b > 0}$ – Ü / Hörsaalübung

Beobachtung 2.19 Sei $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konv'Radius

$\rho > 0$. Wir wissen (Folgerung 2.17): $f \in C^\infty((x_0-\rho, x_0+\rho))$ und

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)a_n(x-x_0)^{n-k} \quad \forall k \in \mathbb{N}\ \forall x \in (x_0-\rho, x_0+\rho).$$

k-mal gliedweise differenzieren

Für $x := x_0$ bekommen wir $f^{(k)}(x_0) = k!\,a_k + 0 + 0 + \ldots$, d.h.,

$$\boxed{a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad \forall k \in \mathbb{N}.}$$

Wie bei Polynomen $P(x) := a_0 + \ldots + a_d x^d$: $a_0 = P(0)$, $a_1 = P^{(1)}(0), \ldots, a_d = \frac{P^{(d)}(0)}{d!}$.

insbesondere sind a_k eindeutig durch f bestimmt.

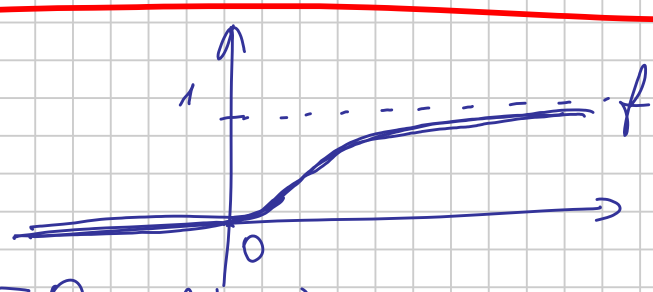
Sei nun $f: I \to \mathbb{R}$ eine Fkt. Wenn f durch eine P'Reihe
offenes Intervall
um $x_0 \in I$ darstellbar ist, muss f also ∞-oft in I diff'bar sein und

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n} \quad \forall x \in I$$

gelten, wobei $f^{(0)} := f$ ist.

$\boxed{\text{Bsp 2.20}}$ (Eine C^∞-Fkt, die nicht durch eine Potenzreihe darstellbar ist)

Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$



Es gilt: $f_+'(0) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{e^{-1/h}}{h} \overset{R := \frac{1}{h}}{=} \lim_{R \to +\infty} \frac{R}{e^R} = 0 = f_-'(0)$,

Warum?

d.h., $f'(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$

Analog $\exists f^{(n)}(0) = 0 \;\; \forall n \in \mathbb{N}$ und $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ Ü / Hörsaalübung

Ang., $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ in I mit $0 \in I$.

offenes intervall

Beobachtung 2.19 $\Rightarrow$ $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = 0 \quad \forall n$, d.h., $f \equiv 0$ in I $\lightning$.

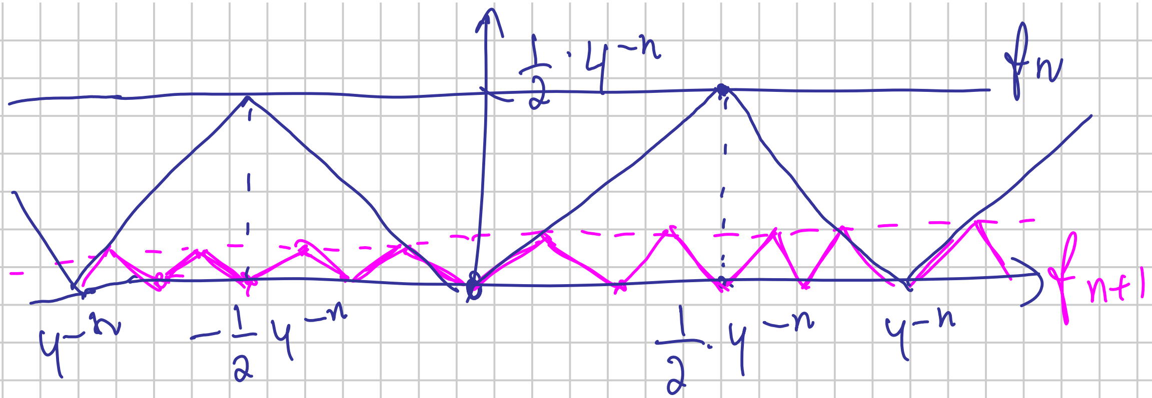
$\boxed{\text{Bsp 2.21}}$ (Eine stetige nirgends diff'bare Fkt) - Königsberger

Erstes publiziertes Bsp: Weierstrass 1872

Davor: Bolzano 1830 (publ. 1922)

Folgendes Bsp: Takagi 1903

Sei f_n (für $n \in \mathbb{N}$) die folgende stetige stückweise lineare Fkt auf $\mathbb{R}$ mit Periode 4^{-n}:



Betrachte $f := \sum_{n=1}^{\infty} f_n$

1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist wohldef. und stetig:

$\|f_n\|_\infty = \frac{1}{2} \cdot 4^{-n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot 4^{-n}$ konv.

Supremumsnorm

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konv. gleichm. (Majorantenkrit.)

$\forall f_n$ stetig, $\sum f_n$ konv. gleichm. $\Rightarrow$ f stetig.

2) Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig. ZZ: f ist in x nicht diff'bar.

Setze $h_n := \frac{1}{4} \cdot 4^{-n}$ bzw. $h_n = -\frac{1}{4} \cdot 4^{-n}$ s.d. f_n zwischen x und $x + h_n$ linear ist.

Dann ist auch $f_1, \dots, f_{n-1}$ linear zwischen x und $x + h_n$.

Also gilt $\forall k \leq n$

$$\frac{f_k(x+h_n) - f_k(x)}{h_n} \in \{-1, 1\}$$

Für $k > n$ ist f_k h_n-periodisch (nach Def. von f_k)

d. h., $\frac{f_k(x+h_n) - f_k(x)}{h_n} = \frac{0}{h_n} = 0$ (warum?),

Insgesamt gilt:

$$\frac{f(x+h_n) - f(x)}{h_n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f_k(x+h_n) - f_k(x)}{h_n} = \sum_{k=1}^{n} \pm 1$$

– keine Cauchyfolge (es kommt immer +1 oder −1 dazu)

$$\Rightarrow \nexists \lim_{n\to\infty} \frac{f(x+h_n) - f(x)}{h_n}$$ ∎

Bem. 1) Das urspr. Bsp von Weierstraß war von der Form

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x), \quad 0<a<1,$$

(damit konv. die Reihe gleichm.)

$b \in \mathbb{N}$ ungerade, $a \cdot b > 1 + \frac{3}{2}\pi$

Hardy zeigte in 1916, dass f für $\forall b$ mit $a \cdot b \geq 1$ nirgends diff. ist.

2) Man kann zeigen, dass eine „typische" stetige Fkt nirgends diff'bar ist.

im Baire-Kategoriensinne

Details – später im Studium.

Mehr interessante Bsp: Siehe Gelbaum, Olmsted „Counterexamples in Analysis"

Kurze Zusammenfassung

1 Aussagen, Mengen, Abb., Relationen, Zahlen

Wahrheitstabellen, Beweistechniken

Mengen, Operationen ($\cup$, $\cap$, ...)

Abb., Bild/Urbild, inj/surj/bij

Kardinalität (Satz v. Schröder-Bernstein: $|A| \leq |B|$, $|B| \leq |A|$ $\Rightarrow$ $|A| = |B|$)

$|A| < |\mathcal{P}(A)|$ – Cantor

Auswahlaxiom

Relationen, Ä'Rel., Ordnungsrel., untere/obere Schranke

Lemma von Zorn

$\mathbb{N}$ (und Induktion), $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$

(geordneter Körper), Archim. Axiom, Sup' Axiom

Intervallschachtelungsprinzip (Vollständigkeit v. $\mathbb{R}$)

$\mathbb{R}$ überabz., $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$

Bernoullische Ungl., Δ-Ungl.

$\mathbb{C}$: Def., Polardarst., Wurzeln...

② Folgen

Konv./Div., Bsp, Eindeutigkeit des Limes, Rechenregeln, Konv. $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ Beschr.

Sandwichkrit., Majorantenkrit., Monotoniekrit.

Bsp: $(-1)^n$, $\sqrt[n]{n} \to 1$, $\sqrt[n]{a} \to 1$ $(\forall a>0)$, q^n, $\frac{n^k}{q^n}$, Dezimaldarst.

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

Eigenschaften von e^x, (Stirling-Formel)

Teilfolgen, Satz von B.-W., Häufungspunkte, $\overline{\lim}$, $\underline{\lim}$

Cauchyfolgen, Cauchykrit. für Konv.

$\lim x_n = \pm\infty$, Rechenregeln, Bsp.

③ Reihen

Konv./Div., abs. Konv.

$\sum a_n$ konv. $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ (a_n) Nullfolge

Bsp.: $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ $(|q|<1)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, Dezimaldarst.

Cauchykrit., Leibnizkrit., Majoranten/Minorantenkrit., Wurzelkrit., Quotientenkrit.

Mehr Bsp. (z.B. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, ...)

(Cauchy-Schwarzsche Ungl., Cauchyprodukt v. Reihen
Umordnungssatz für abs. konv. Reihen
Riemannsche Umordnungssatz)

Potenzreihen Def., Bsp (e^x, Sinus-, Kosinusreihe, ...)
Konv.'Radius ρ
Konv. in $U_\rho(x_0)$, Div. in $\{x : |x-x_0| > \rho\}$
keine Aussage auf dem Rand
Formeln für ρ
(Cauchyprodukt)

4 Stetigkeit Def., Bsp (sign, V, x^α, ...), Rechenregeln,
Folgenkrit., mehr Bsp. (rat. Fkt)
Gleichm. Stetigkeit, Bsp., gl. stetig $\overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow}$ stetig

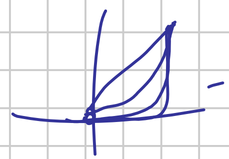
(Lipschitzstet.), stetig auf $[a,b] \Rightarrow$ gl. stet.

Nullstellensatz v. Bolzano, ZWS

f stetig auf $[a,b] \Rightarrow \begin{cases} \text{beschr.} \\ \exists \text{ Max., Min.} \end{cases}$

Punktw. und gleichm. Konv.

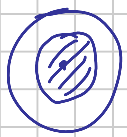
gleichm. Konv. $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ punktw.



Stet. der Grenzfkt (bei gl. Konv.)

P'Reihen stetig in $U_\rho(x_0)$, da gleichm. Konv. $\forall U_r(x_0)$, $r<\rho$

~~($\{x\}$)~~



Stet. von f^{-1}, ln, Eigenschaften;

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^a} = 0 \quad \forall a>0$, ...

Grenzwerte v. Fkt

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$, einseitige Grenzwerte,

f stetig in $a \iff f(a-) = f(a+) = f(a)$

Links/rechtsstet., Sprungstelle, Folgenkrit.

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

Bsp: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^a} = \infty \quad \forall a>0$.

$\iff \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^a}{e^x} = 0$

(Cantormenge / Cantortreppe)

5 Diff'Rechnung

Abl., geom. Bedeutung, diff. $\Rightarrow$ stetig, diff. $\not\Leftarrow$ stetig

Rechenregeln (..., Kettenregel), Bsp: $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, Polynome, rat. Fkt., $\sin'$, $\cos'$, $\tan'$, ..., $\sin(\frac{1}{x})$, ...

Diff. von f^{-1}

$f^{(n)}$, C^∞-Fkt'en

Extrema, notw. Bedingung (a Extr., f diff. $\Rightarrow f'(a)=0$), $\not\Leftarrow$

Satz v. Rolle, MWS, $f' \equiv 0$ in $(a,b) \Leftrightarrow f$ konst.

Monotonie vs. f'

Hinreichende Bed. für Extrema, Vorzeichen von f',

Bsp

(Verallg. MWS)

L'Hospitalsche Regel, Bsp: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$, ...

Konvex / konkav, Wendepunkt

(Ungl.: Jensen, gewicht. arithm./geom. Mittel)

Cauchykrit. für gleichm. Konv.

Diff'barkeit v. Grenzfkt'en (wann $(\lim\limits_{n\to\infty} f_n)' = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'$)

— " — Fkt' Reihen (wann $(\sum f_n)' = \sum f_n'$) (gl. konv.)

– 11 — Potenzreihen + Formel für Abl.

insb.: $(e^x)' = e^x$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^n}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$, ...

f = Potenzreihe $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ $f \in C^\infty$ in $U_\rho(x_0)$

($\exists$ stetige, nirg. diff'bare Fkt)

Viel Erfolg