Notiztitel 17.01.2019

Satz 4.3 (Folgenkrit. für Grenzwerte von Fkt'en)

Sei $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, $a \in D$ und $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = c \iff \forall \text{ Folge } (x_n) \subset D \setminus \{a\} \; (x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to c)}$$

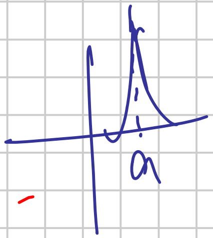
Dasselbe gilt für $\mathbb{C}$ statt $\mathbb{R}$

Beweis: Analog zum Folgenkrit. für Stet.: Ü / Hörsaalübung

Bem. Analog für einseitige Grenzwerte:

$f(a-) = c \iff \forall$ Folge $(x_n) \subset D \setminus \{a\}$ $\left(x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to c \right)$
$\underbrace{a-}_{\text{bzw. } a+}$ $\qquad x_n < a \ \forall n$ (bzw. $>$)

Def. 4.4 (<u>Uneigentliche Grenzwerte</u>)
Sei a ein HP von $D \subset \mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$.



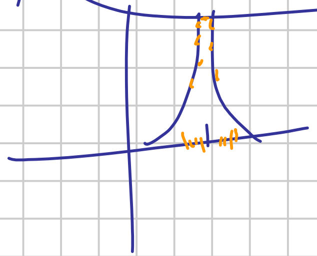
Wir sehen $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ (bzw. $= -\infty$)

wenn $\forall R > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in D \cap \dot{U}_\delta(a) \quad f(x) > R$ ($f(x) < -R$)

Analog def. man $f(a+) = +\infty$ (bzw. $-\infty$)
$f(a-) = +\infty$ (bzw. $-\infty$)

(ersetze $\dot{U}_\delta(a)$ durch $(a, a+\delta)$ bzw. $(a-\delta, a)$)

Ü Hörsaalübung : Folgenkriterium für uneigentliche Grenzwerte:



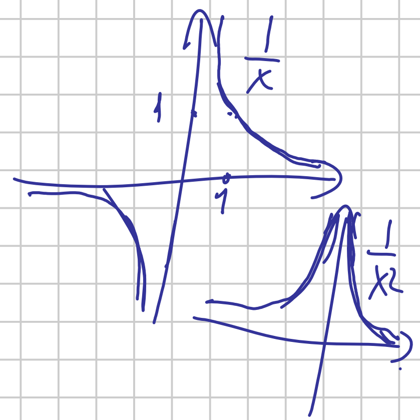
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ (bzw. $-\infty$) $\Leftrightarrow \forall (x_n) \subset D \setminus \{a\}$ $(x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to +\infty)$ (bzw. $-\infty$)

Analog für $f(a-)$, $f(a+)$

Bsp $f(x) = \frac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}$ fest, $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to 0+} \frac{1}{x^n} = +\infty$ (warum? Welches δ passt?)

$\lim\limits_{x\to 0-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} -\infty, & n \text{ ungerade} \\ +\infty, & n \text{ gerade} \end{cases}$,



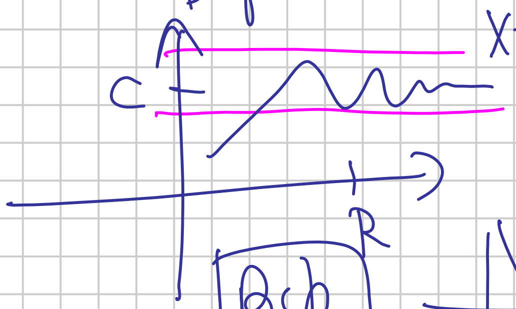
d.h., $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^n} \begin{cases} \text{ex. nicht !}, & n \text{ ungerade} \\ +\infty, & n \text{ gerade} \end{cases}$

$\boxed{\text{Bsp 4.5}}$ Ein wichtiger Grenzwert: $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$ – kommt später

$\boxed{\text{Def. 4.6}}$ (Grenzwerte im Unendlichen)

Sei $D \subset \mathbb{R}$ unbeschränkt nach oben, $f: D \to \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$

Def.: $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = c$, wenn (bzw. $-\infty$)



$\forall \varepsilon > 0\ \exists R > 0 : \forall x \in D \cap \overbrace{\underbrace{(R, +\infty)}_{\text{„Umg. von } +\infty\text{"}}}^{\text{bzw. } (-\infty, -R)}$

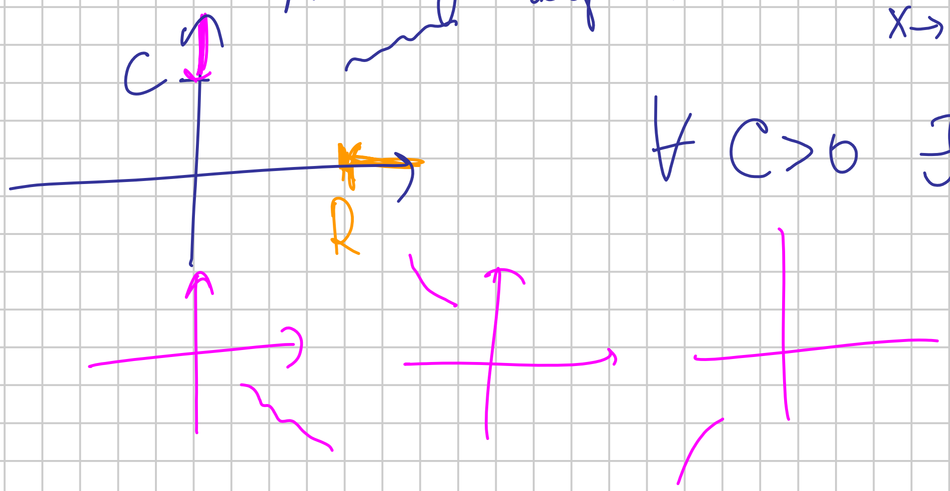
$|f(x) - c| < \varepsilon$.

$\boxed{\text{Bsp}}$

$f(x) = \frac{1}{x}$: $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$

Analog def. man $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, bzw. $-\infty$ wenn

(bzw. $x \to -\infty$)



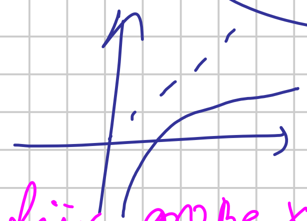
$\forall C>0\ \exists R>0:\ \forall x \in D \cap (R, +\infty)$ bzw. $(-\infty, -R)$ $\ f(x) > C$ bzw. $f(x) < -C$.

Man hat entsprechende Folgenkriterien für uneigentliche Grenzw. und für Grenzw. im ∞ Ü Hörsaalübung

Wichtige Grenzwerte

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0 \quad \forall r>0}$$

da $\ln x < x^{r/2}$ für große x

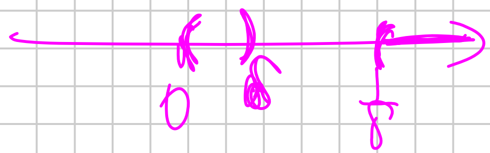


$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{x^r}{e^x} = 0 \quad \forall r>0}$$ (Hörsaalübung)

<u>Bem.</u>: $\lim\limits_{x\to 0+}$ und $\lim\limits_{x\to+\infty}$ (bzw. $\lim\limits_{x\to 0-}$ und $\lim\limits_{x\to-\infty}$) sind dual zueinander (d.h.)

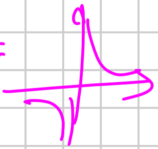
$$\lim_{x\to+\infty \text{ (bzw. } -\infty)} f(x) = \lim_{y\to 0+ \text{ (bzw. } 0-)} f\left(\frac{1}{y}\right)$$

„Variabelsubstitution $y := \frac{1}{x}$“



– warum? – Warum? (Hörsaalübung)

Achtung: $\lim\limits_{y\to 0} f\left(\frac{1}{y}\right) \neq \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$: Bsp: $f(x)=\frac{1}{x}$



Rechenregeln für $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ bzw. $x\to\pm\infty$ bzw. $x\to a\pm$

sind analog zu Rechenregeln für Folgen:

$$\lim (f+g)(x) = \lim f(x) + \lim g(x)$$
$$\lim (f \cdot g)(x) = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$$
$$\lim \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}, \text{ wenn } \lim g(x) \neq 0.$$

Grund: Folgenkriterium: Ü / Hörsaalübung.

$\boxed{\text{Bsp}}$ $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$, $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$.

Es gilt: $\dfrac{x^2-1}{x-1} = x+1 \xrightarrow[x \to 1]{} 2$, da $x+1$ stetig

aber $f(1)$ ist nicht def.!

Eine besondere stetige Fkt:

$\boxed{\text{Bsp } 4.7}$ (<u>Cantormenge und Cantortreppe</u>)

Betrachte $C_1 := [0,1]$

$C_2 := [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$

$C_3 := [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$

(das mittlere Drittel wird aus ~~V~~ Intervall weggewischt),

Def. $C := \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ – die <u>Cantormenge</u> (<u>Wischmenge</u>)

Eigenschaften von C:

- $x \in C \setminus \{$linke Endpunkte von weggew. Interv.$\}$

$\Longleftrightarrow \quad x = 0{,}a_1 a_2 a_3 \ldots$ für $a_i \in \{0, 2\}$ ← triadische Entwicklung (Basis 3)

- C ist überabz.: $|C| = |[0,1]|$:

  Die Fkt $f : C \setminus \{\text{linke Endpunkte} \ldots\} \to [0,1]$:

  $$\boxed{f(0{,}a_1 a_2 a_3 \ldots) := 0{,}\tfrac{a_1}{2}\tfrac{a_2}{2}\tfrac{a_3}{2}\ldots}$$

  triad. Entw. — dyadische Entw.

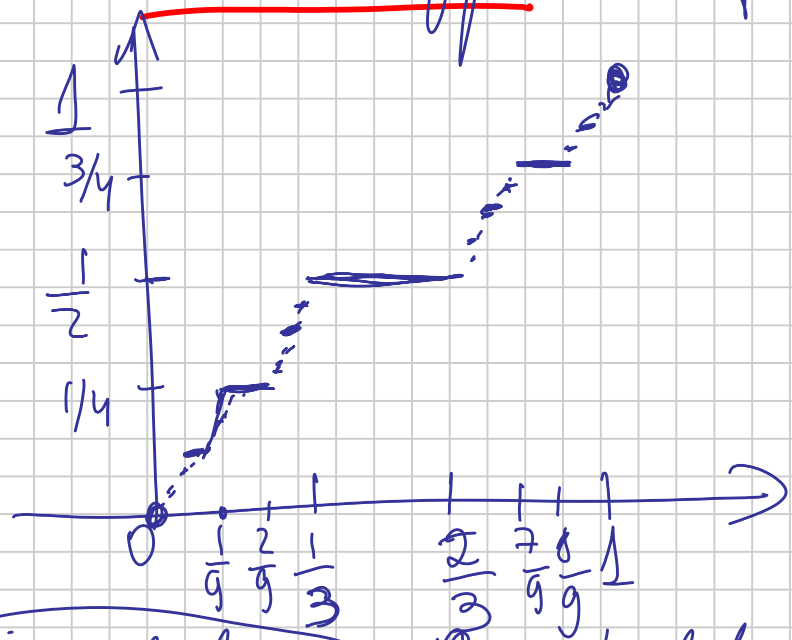
  ist bij (warum?)

- Aber: Gesamtlänge der weggew. Intervalle ist =

  $$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \ldots = \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1$$

$= $ Länge $[0,1]$ – „fast alles" weggewischt!

Def. die Cantortreppe wie folgt:



Ergänze f von oben durch:

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ auf } [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ \frac{1}{4} \text{ auf } [\frac{1}{9}, \frac{2}{9}] \\ 3/4 \text{ auf } [7/9, \frac{8}{9}] \\ \text{usw.} \end{cases}$$

Hörsaalübung: f wohldef., monoton $\nearrow$, stetig

„Fast überall konstant", kommt aber von 0 zu 1.

IV Differentialrechnung

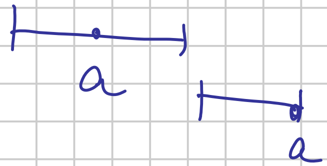
Ursprung: Ende des 17. Jahrh.; Isaac Newton, Gottfried Wilhelm Leibniz
physikalische Theorie Geometrie

weiterentwickelt: Cauchy (Anfang des 19. Jahrh.)
Weierstraß (Ende –"–) ~ moderne Sprache

1. Grundlagen

Def. 1.1 Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $a \in I$.

Eine Fkt $f: I \to \mathbb{R}$ heißt



- <u>differenzierbar in a</u>, wenn der Grenzwert

$$\boxed{f'(a) := \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}$$

(oder, äq.: $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$)
Warum?

existiert. Dieser heißt die <u>Ableitung von f in a</u>, schreibe auch $\frac{df}{dx}(a)$.

- <u>diff'bar in I</u>, wenn f in $\forall a \in I$ diff'bar ist.
in diesem Fall ist $f': I \to \mathbb{R}$ eine Fkt.

Bem. 0) Diff'barkeit in a ist eine „lokale" Eigenschaft (nur Verhalten von f in einer Umg. von a wichtig)

1) a Randpunkt von I $\Rightarrow$ einseitiger Limes

2) Die einseitigen Ableitungen $f_+'(a)$, $f_-'(a)$ sind durch entsprechende einseitige Grenzwerte

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} \quad , \quad \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}}$$

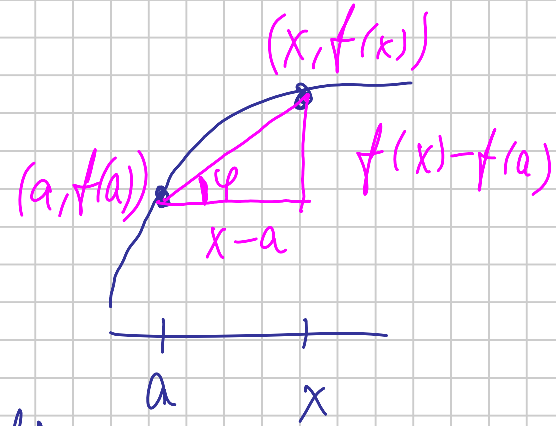
def.

3) $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ (bzw. $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$) heißen Differenzenquotienten.

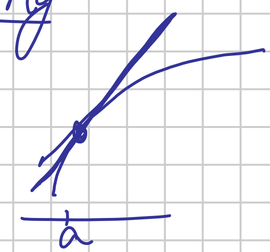
(für $x \neq a$ bzw. $h \neq 0$)

4) Geom. Bedeutung:

Diff'Quot. = Steigung der Geraden durch $(a, f(a))$ und $(x, f(x))$ (d.h., $\tan(\varphi)$).



Wenn $f'(a)$ ex., so ist $f'(a)$ die Steigung der Tangente im Punkt $(a, f(a))$



5) f diff'bar in a $\Longleftrightarrow$ $\exists c \in \mathbb{R}$:

$$f(a+h) - f(a) = c \cdot h + r(h),$$

linear in h

wobei $\frac{r(h)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$.

Ü ~~Hörsaalübung~~

In diesem Fall ist $c = f'(a)$ und $r(h)$ heißt der Fehler der (linearen) Approximation.

$\boxed{\text{Bsp}}$ 1) f konstant $\Rightarrow$ $f' \equiv 0$:

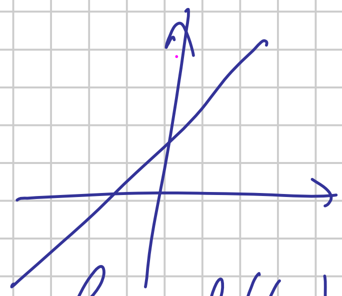
konstant gleich

$$\frac{\underbrace{f(x)-f(a)}_{=0}}{x-a} = 0 \quad \forall x \neq a.$$

2) Lin. Fkt'en:

$f(x) = bx + c$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{bx + \cancel{c} - ba - \cancel{c}}{x-a} = b \longrightarrow b = f'(a) \quad \forall a.$$



D. h., $f' \equiv b$.

3) $f(x) = x^2$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$\frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{2a\cancel{h} + h^{\cancel{2}}}{\cancel{h}} = 2a + h \xrightarrow[h \to 0]{} 2a \quad \forall a,$$

d.h., $(x^2)' = 2x$.

$\boxed{\text{Prop. 1.2}}$ $\boxed{f \text{ diff'bar in } a \Rightarrow f \text{ stetig in } a}$

Beweis Folgenkrit. für Stet.:

Sei $(x_n) \subset I$, $x_n \to a$. Z.z.: $f(x_n) \to f(a)$

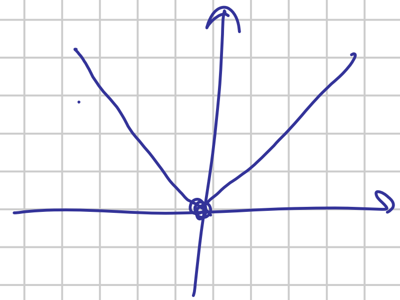
Sei OBdA $x_n \neq a$. Dann gilt:

Warum?

$$f(x_n) - f(a) = \underbrace{\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}}_{\to f'(a)} \cdot \underbrace{(x_n - a)}_{\to 0} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \quad \blacksquare$$

$\boxed{\text{Bsp}}$ ($\not\Leftarrow$ i. A.!)

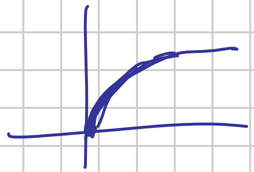
1) Die Fkt $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig, aber nicht diff'bar in $a = 0$, denn



$$f_+'(0) = \lim_{h \to 0+} \frac{h - 0}{h} = 1$$

$$f_-'(0) = \lim_{h \to 0-} \frac{(-h) - 0}{h} = -1 \neq f_+'(0),$$

d. h., $\nexists\, f'(0)$

2) 

$\sqrt[2]{\cdot} : [0,\infty) \to [0,\infty)$

$$\frac{\sqrt{h} - 0}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}} \xrightarrow[h \to 0+]{} +\infty$$

Bem. $\exists$ stetige Fkt'en, die <u>nirgends</u> diff'bar sind!
(bei Interesse nachlesen: Buch „Gegenbeispiele in Analysis")

Satz 1.3 (Rechenregeln)

1) Seien f, g diff'bar in x und $c \in \mathbb{R}$. Dann sind $f+g$, $f \cdot g$ und $\frac{f}{g}$ (falls $g(x) \neq 0$) diff'bar in x mit

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

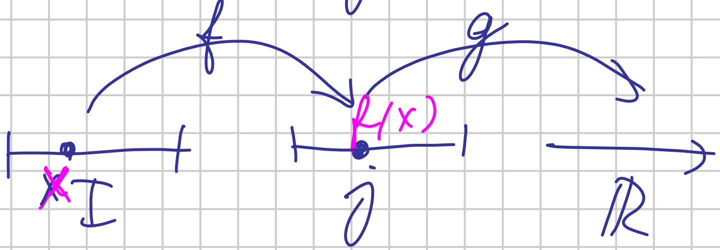
$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$ – Produktregel

$$(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$$ — Quotientenregel.

2) Sei $f: I \to J$ diff'bar in $x \in I$ und $g: J \to \mathbb{R}$ diff'bar in $f(x) \in J$. Dann ist $g \circ f: I \to \mathbb{R}$ diff'bar in x mit

Intervalle



$$\boxed{(g\circ f)'(x) = g'(f(x))\cdot f'(x)}$$ — Kettenregel

<u>Beweis</u> 1) Schreibe die Diff'Quot. für $f+g$ als

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} f'(x) + g'(x)$$

Für $f \cdot g$:

$$\underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{h \to 0 \,\to\, f'(x)} \cdot \underbrace{g(x+h)}_{h \to 0 \,\to\, g(x)} + \underbrace{\frac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{h \to 0 \,\to\, g'(x)} f(x) \longrightarrow f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$$

(da g insb. stetig)

Für f/g (beachte: $g \neq 0$ in einer Umg. von x, da stetig):

$$\underbrace{\frac{1}{g(x+h)g(x)}}_{h \to 0 \,\to\, \frac{1}{g^2(x)}} \left(\underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{h \to 0 \,\to\, f'(x)} g(x) - \underbrace{\frac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{h \to 0 \,\to\, g'(x)} f(x) \right) \longrightarrow \left(\frac{f' \cdot g - g' \cdot f}{g^2} \right)(x).$$

(da g stetig)

2) Kettenregel: analog: Hörsaalübung [redacted]

$\boxed{\text{Bsp}}$ 1) Monome: Wir zeigen $\boxed{(x^n)' = n \cdot x^{n-1}}$

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} \overset{\text{binom. Lehrsatz}}{=} \frac{n \cdot \cancel{h} \cdot x^{n-1} + h^{\cancel{2}} \cdot \text{etwas}}{\cancel{h}} = n \cdot x^{n-1} + h \cdot \underbrace{(\text{etwas stetiges})}_{\to\ \text{etwas}} \xrightarrow[h \to 0]{} n \cdot x^{n-1}$$

$h \to 0$

2) Rechenregeln: Polynome und rationale Fkt'en $\left(\frac{p_1}{p_2}\right)$ sind diff'bar in $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R} \setminus \{\text{Nullstellen von } p_2\}$ mit

$$(a_0 + a_1 x + \ldots + a_d x^d)' = a_1 + 2 a_2 x + \ldots + d \cdot a_d x^{d-1}$$

z.B.: $(x^{17} + 5 \cdot x^3)' = 17 \cdot x^{16} + 15 \cdot x^2$

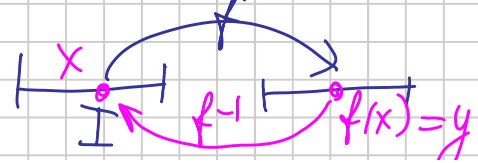
$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1' \cdot x - 1 \cdot x'}{x^2} = -\frac{1}{x^2} \quad : \quad \boxed{\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}}$$

Ü $\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}$, d.h., die Formel $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ stimmt auch für negative n!

Achtung: $\frac{1}{x}$ kommt dabei nicht als Ableitung vor!
(später: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$)

Satz 1.4 (Diff'keit der Umkehrfkt)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ streng monoton und stetig. Wenn f in einem $x \in I$ diff'bar ist mit $f'(x) \neq 0$, dann ist



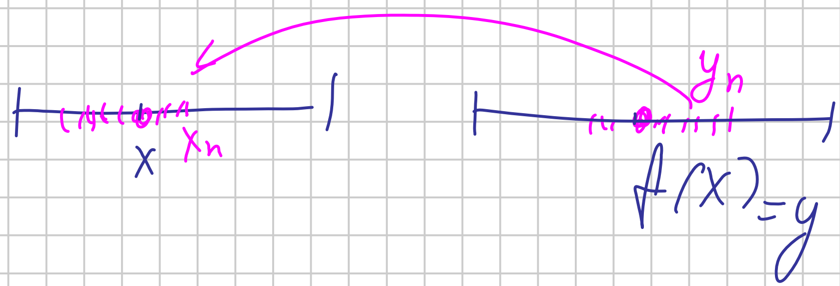
$\underbrace{f^{-1}: f(I)}_{\text{ein Intervall}} \to I$ diff'bar in $y := f(x)$ und

$$\boxed{(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}}$$

<u>Beweis</u> Nach Satz III.3.5 ist $f^{-1}: f(I) \to I$ stetig.

Sei $(y_n) \subset f(I)\setminus\{y\}$, $y_n \to y$. Dann liegen alle

$x_n := f^{-1}(y_n)$ in $\underbrace{I\setminus\{x\}}_{\text{da } f \text{ inj.}}$



und

$$x_n = f^{-1}(y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{f^{-1} \text{ stetig}} f^{-1}(y) = x$$

Also haben wir:

$$\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y)}{y_n - y} = \frac{x_n - x}{f(x_n) - f(x)} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{f'(x)} \qquad \blacksquare$$

$\boxed{\text{Bsp}}$ $\left(\sqrt[n]{y}\right)' = \frac{1}{n\,x^{n-1}} \Big|_{x := \sqrt[n]{y} = f^{-1}(y)} = \frac{1}{n \cdot y^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n} \cdot y^{\frac{1}{n}-1}$

$f(x) = x^n$

$f'(x) = n\,x^{n-1}$

$f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y}$

$\frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$

wobei wir $x := \ldots$ einsetzen

Allg. Formel: $\boxed{(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}}$ – später

$\boxed{\text{Bsp 1.5}}$ Wir zeigen: $\boxed{\sin' = \cos, \quad \cos' = -\sin}$

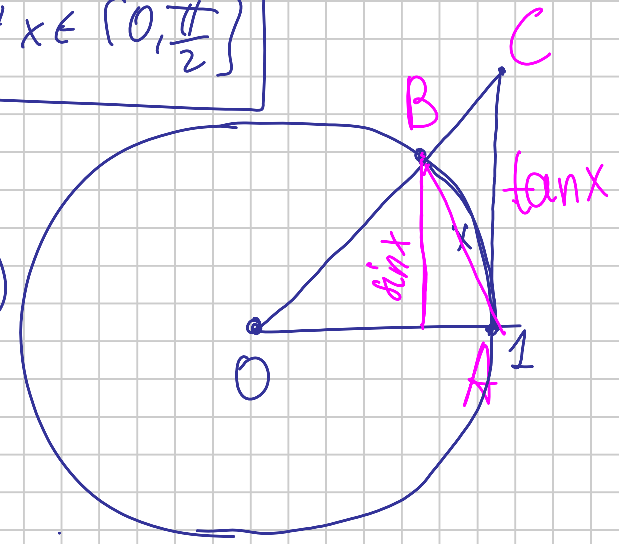
(für sin, cos aus der Schule)

Schritt 1 Wir zeigen zuerst: $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$

Zuerst zeigen wir: $\boxed{\sin x < x < \tan x \quad \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]}$

Sei $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Es gilt

$$\underbrace{\text{Fläche}(OAB)}_{\frac{\sin x \cdot 1}{2}} < \underbrace{\text{Fläche}(\text{Sektor})}_{\cancel{\pi} \cdot \frac{x}{2\cancel{\pi}}} < \underbrace{\text{Fläche}(OAC)}_{\frac{\tan x \cdot 1}{2}}$$



D.h., $\sin x < x < \tan x$.

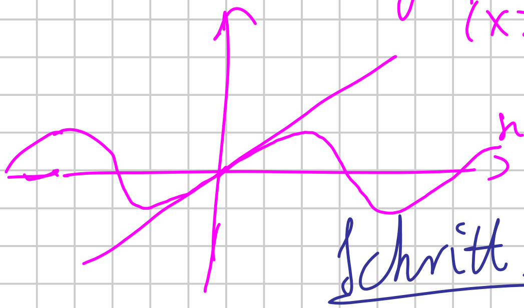
Daraus folgt: $\underbrace{\cos x}_{\xrightarrow{x \to 0} 1} < \frac{\sin x}{x} < 1 \Rightarrow \frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$ (Sandwichkrit. + Folgenkrit.)

folgt aus Schritt 2

<u>Schritt 2</u> cos, sin stetig.

$$|\cos x - \cos y| \leq \cancel{2}\cdot\underbrace{\left|\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\right|}_{\leq 1}\cdot\underbrace{\left|\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right|}_{\leq \left|\frac{x-y}{\cancel{2}}\right|} \leq |x-y| \xrightarrow[x\to y]{} 0 \quad \forall y.$$

Achtung: $|\sin x| \leq |x|$
($x>0$ - beweisen, $x<0$ - klar ($\sin(-x) = -\sin x$))



Analog für sin

<u>Schritt 3</u> $\sin' = \cos$ $\quad$ ($\cos' = -\sin$ analog)

$$\frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = 2\cdot\underbrace{\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)}_{\xrightarrow[x\to x_0]{} \cos x_0}\cdot\underbrace{\frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}\cdot 2}}_{\xrightarrow[x\to x_0]{} \frac{1}{2}\ (\text{Schritt } 1)} \xrightarrow[x\to x_0]{} \cos x_0 \quad \forall x_0$$

∎

Damit bekommen wir z.B.:

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' \underset{\substack{\text{Rechen-}\\\text{regeln}}}{=} \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

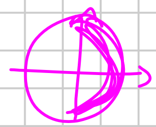
$$\boxed{(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}}$$

$$\boxed{(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}}$$

(analog: Ü)

$$(\arcsin x)' \underset{\substack{\text{Satz 1.4}\\\text{für } f=\sin}}{=} \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\arcsin x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$



$$\boxed{(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

$$\boxed{(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$ (analog: Ü)

Def. 1.6 (Ableitungen höherer Ordnung)

Sei $f: I \to \mathbb{R}$ diff'bar in I. Wenn $f': I \to \mathbb{R}$ in einem $a \in I$ diff'bar ist, so heißt die Ableitung von f' in a die zweite Ableitung von f in a, schreibe $f''(a)$, $f^{(2)}(a)$, $\frac{d^2 f}{dx^2}(a)$. Analog def. man rekursiv die n-te Ableitung $f^{(n)}$ von f als Ableitung von $f^{(n-1)}$, wenn sie ex. (schreibe auch $\frac{d^n f}{dx^n}$). Dabei heißt f beliebig oft diff'bar,

Intervall

wenn f n-mal diff'bar $\forall n$ ist.

f heißt n-mal stetig diff'bar, wenn sie n-mal diff'bar ist und $f^{(n)}$ stetig ist (schreibe: $f \in C^n(I)$)

Bem. f ∞-oft diff'bar $\Rightarrow$ ∞-oft stetig diff'bar

schreibe: $f \in C^\infty(I)$.

$\boxed{\text{Bsp}}$ 1) Polynome $\in C^\infty(\mathbb{R})$ und $(p(x))^{(n)} = 0$ $\forall n > \deg p$ Ordnung.

2) sin, cos $\in C^\infty(\mathbb{R})$ mit:

$$\sin^{(n)}(x) = \begin{cases} \sin x, & 4 \mid n \\ \cos x, & n = 1 \mod 4 \\ -\sin x, & n = 2 \mod 4 \\ -\cos x, & n = 3 \mod 4 \end{cases}$$

ähnlich für cos.

3) Später: P'Reihen sind C^∞(Konvergenzbereich), damit: e^x, $\ln x$, ...

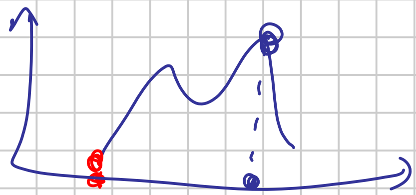
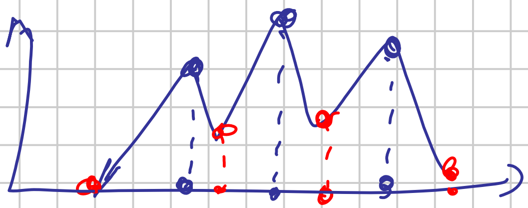
2. Der Mittelwertsatz und Extrema

Def. 2.1 Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$. Die Fkt f hat in x_0

- ein globales Maximum (Minimum), wenn

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (\text{bzw. } f(x) \geq f(x_0)) \quad \forall x \in D$$

- ein lokales Maximum (Minimum), wenn es ein $\delta > 0$ ex. mit

$f(x) \leq f(x_0)$ (bzw. $f(x) \geq f(x_0)$) $\forall x \in U_\delta(x_0)$ (!)

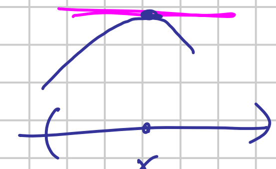
- ein Extremum, wenn Maximum oder Minimum

Bem. Globales Extremum $\overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow}$ lokales Extr.

$\boxed{\text{Satz 2.2}}$ (Extremalpunkte $\Rightarrow$ Ableitung 0)

Sei $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ und sei $x_0 \in (a,b)$ ein lokales Extremum von f. Wenn f diff'bar in x_0 ist, dann gilt

$$f'(x_0) = 0.$$



Beweis OBdA sei x_0 ein lok. Maximum.
(wenn Min. – analog oder: betr. $-f$)

Nach Voraus. $\exists \delta > 0$: $f(x) \le f(x_0)$ $\forall x \in U_\delta(x_0)$

Dann gilt:

$$f'(x_0) = \underbrace{\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{\overbrace{f(x) - f(x_0)}^{\le 0}}{\underbrace{x - x_0}_{\le 0}}}_{\ge 0} = \underbrace{\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{\overbrace{f(x) - f(x_0)}^{\le 0}}{\underbrace{x - x_0}_{\ge 0}}}_{\le 0}$$

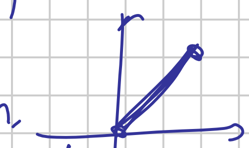
$\Rightarrow f'(x_0) = 0$ ∎

Bem. 1) Rückrichtung falsch ($f'(x_0) = 0 \not\Rightarrow x_0$ lok. Extr.)

$\boxed{\text{Bsp}}$ $f(x) = x^3$, $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 = 0$.

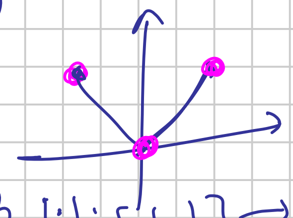
$f'(x) = 3x^2 = 0$, aber kein Extr.

2) Am Ende des Def. Bereichs ist die Aussage i.A. falsch: $\boxed{\text{Bsp}}$ $f(x) = x$, $f: [0,1] \to \mathbb{R}$, 0 Min., 1 Max., $f' \equiv 1$



3) Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Kandidaten für Extremalstellen sind also:

- a und b
- $\forall x_0 \in (a,b)$ mit $f'(x_0)=0$
- $\forall x_0$, wo f nicht ~~diff'bar~~ ist.

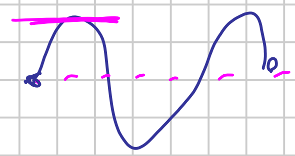


z.B. $|\cdot|: [-1,1]\to\mathbb{R}$

$\boxed{\text{Satz 2.3}}$ (Rolle, 1691) – für Polynome, allg. Version: Cauchy 1823

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und in (a,b) diff'bar.

Wenn $f(a)=f(b)$ gilt, dann $\exists \xi\in(a,b)$ mit $f'(\xi)=0$



Beweis Fall 1: f konst $\Rightarrow$ klar.

Fall 2: f nicht konst.

f stetig in $[a,b] \Rightarrow \exists$ (globales) Maximum und Minimum.

$\left.\begin{array}{l} f \text{ nicht konst.} \\ f(a)=f(b) \end{array}\right\} \Rightarrow$ mindestens eins davon liegt in (a,b) $(=:\xi)$

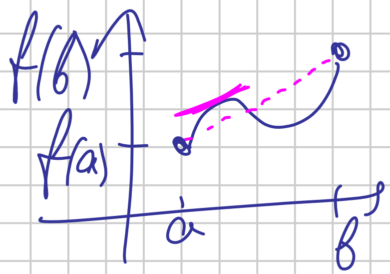
Satz 2.2 $\Rightarrow f'(\xi)=0$. ∎

Eine Verallg.:

Satz 2.4 (Mittelwertsatz: MWS)

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und in (a,b) diff'bar. Dann

$\boxed{\exists\, \xi\in(a,b)}$ mit $\boxed{f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$,

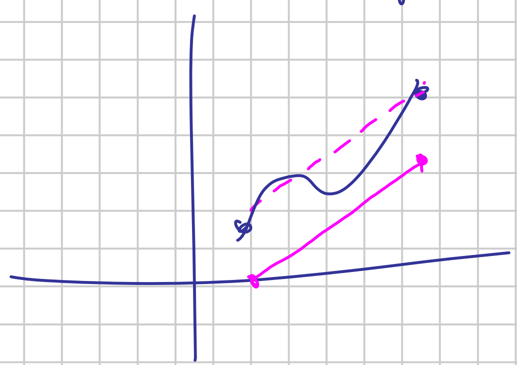


oder: $\boxed{f(b) - f(a) = f'(\xi)\cdot(b-a)}$

Geom. Interpretation $\exists \xi$ s.d. die Tangente von f in ξ parallel zur Geraden durch $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ ist.

Beweis Idee: Benutze Rolle für eine geeign. Fkt g.

Def. $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ durch:



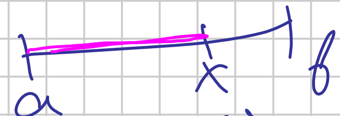
$$g(x) := f(x) - \underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)}_{\text{Graph: Gerade durch } (a,0) \text{ und } (b,\, f(b)-f(a))}$$

- g stetig in $[a,b]$, diff'bar in (a,b)
- $g(a) = f(a) = g(b)$

Rolle: $\exists\, \xi \in (a,b): \underbrace{g'(\xi) = 0}_{f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$ ∎

Folgerung 2.5: Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, diff'bar in (a,b).
Wenn $f'(x) = 0 \ \forall x \in (a,b)$, dann ist f konstant.

$$\boxed{f' \equiv 0 \iff f \text{ konstant}}$$



Beweis: Sei $x \in (a,b]$,
MWS für $[a,x]$: $f(x) - f(a) = \underbrace{f'(\xi)}_{=0}(x-a)$ für ein $\xi \in (a,x)$
d.h., $f(x) = f(a)$ ∎

Bem. insb. folgt daraus für $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a,b) diff'bar:

$$\boxed{f' = g' \text{ in } (a,b) \iff \exists\, c \in \mathbb{R} \text{ mit } f = g + c}$$

Beweis: $(f-g)' = 0 \Rightarrow f - g = \text{konst.}$ ∎

Bem. Daraus kann man leicht sehen, dass nur Polynome eine höhere Abl. $\equiv 0$ haben. (Ü)

Satz 2.6 (Hinreichende Bedingung für Monotonie)

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a,b) diff'bar. Dann gelten

a) $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow f \nearrow$ in $[a,b]$

$\quad$ –"– ≤ 0 –"– $\searrow$ –"–

b) $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ streng $\nearrow$ in $[a,b]$

$\quad$ —"— $\;<0\quad$ —"— $\quad\searrow\quad$ —"—

<u>Beweis</u> a) $f'(x) \geq 0$. Ang., f nicht $\nearrow$, d.h., $\exists\, x_1 < x_2$ mit $f(x_1) > f(x_2)$.

MWS: $\exists\, \xi \in (x_1, x_2)$ mit

$$\underbrace{f'(\xi)}_{\geq 0} = \underbrace{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}}_{<0}$$

$f(x_2) - f(x_1) < 0$, $x_2 - x_1 > 0$ $\quad\lightning$ $\quad\blacksquare$

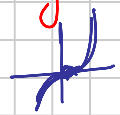
Rest: analog.

<u>Bem.</u> 1) Geometrisch: überall Tangente mit pos. Winkel $\Rightarrow \nearrow$

$\quad$ —"— neg. —"— $\searrow$

2) Rückrichtungen in b) i. A. falsch:

$\boxed{\text{Bsp}}$: $f(x) = x^3$



$\boxed{\text{Satz 2.7}}$ (Hinreichende Bedingung für Extrema)

Sei $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ diff'bar, $x_0 \in (a,b)$, f in x_0 zweimal diff'bar mit

$$f'(x_0)=0 \quad \text{und} \quad f''(x_0)>0$$

$$(\quad -\text{''}- \qquad\qquad <0 \,)$$

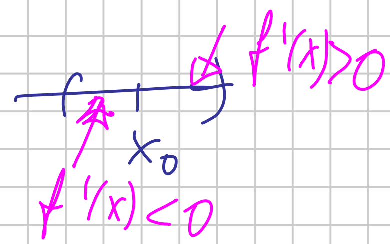
Dann besitzt f in x_0 ein lokales Minimum (Maximum)

Beweis Sei oBdA $f''(x_0)>0$. (sonst analog oder $g:=-f$)

Da $f''(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)-\underbrace{f'(x_0)}_{=0}}{x-x_0} > 0$, nach Voraus.

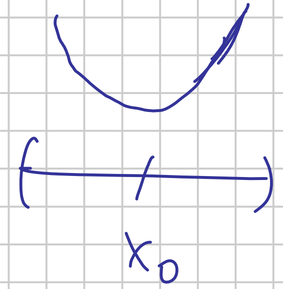
$\exists\, \delta>0$ s.d. $\forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$

$$\frac{f'(x)}{x-x_0} > 0.$$



D.h., $\begin{cases} f'(x) < 0, & \text{wenn } x \in (x_0-\delta, x_0) \\ f'(x) > 0, & \text{—"—} \quad (x_0, x_0+\delta) \end{cases}$

Wir wissen: f ist in x_0 stetig



MWS: $\quad f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x-x_0) > 0$

für ein ξ zw. x und x_0

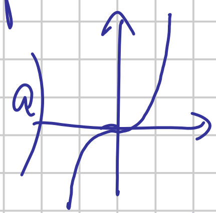
(da $x - x_0 < 0$ bzw. $x - x_0 > 0$).

$\Rightarrow$ x_0 ist ein lok. Minimum ■

Bem. 1) Aus dem Beweis folgt: x_0 sogar ein isoliertes Extremum (d.h., $\exists\ U_\delta(x_0)$, wo keine weiteren Extrema liegen)

2) Wenn $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$: keine Aussage möglich:

$\boxed{\text{Bsp}}$

a)  $f(x) = x^3$

$f'(0) = f''(0) = 0$, 0 kein Extremum.

b)  $f(x) = x^4$: $f'(0) = f''(0) = 0$,

0 ist ein (glob.) Minimum

c)  $f(x) = -x^4$: –"– Maximum

Man kann zeigen: Wenn

ohne Beweis im Moment

$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(2n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(2n)}(x_0) \underset{<0}{>0}$,

dann ist x_0 ein lok. Minimum (bzw. Maximum)

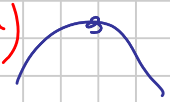
(Wenn $f'(x_0) = \ldots = f^{(2n)}(x_0) = 0$, $f^{(2n+1)}(x_0) \neq 0$, keine Aussage möglich)

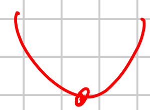
3) Wie man im Beweis sah, kann man lok. Extrema auch nur mit Hilfe von f' finden:

$$\begin{cases} f'(x) > 0 \ \ {\color{red}<0} & \forall x \in (x_0-\delta, x_0) \\ f'(x) < 0 \ \ {\color{red}>0} & \forall x \notin (x_0, x_0+\delta) \end{cases},$$

dann ist $f \nearrow$ auf $(x_0-\delta, x_0)$ (bzw. $\searrow$)

$f \searrow$ auf $(x_0, x_0+\delta)$ (bzw. $\nearrow$)





und x_0 ist lok. Maximum (bzw. Minimum)

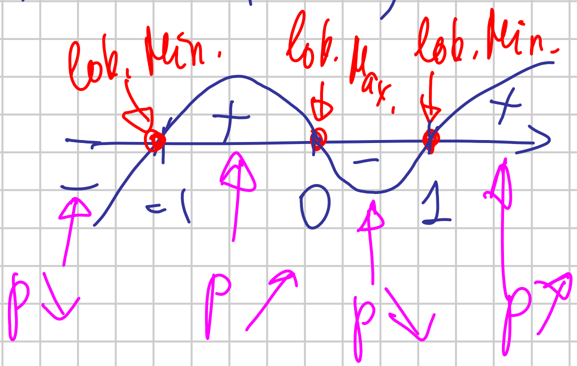
$\boxed{\text{Bsp 2.8}}$ Sei $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Polynom mit

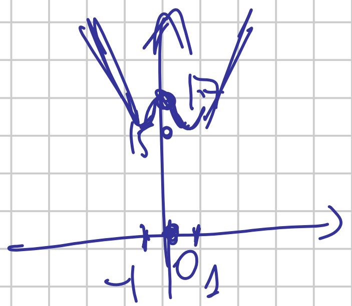
$$p(x) = 2x^4 - 4x^2 + 17$$

$$p'(x) = 8x^3 - 8x = 8x(x^2-1) = 8x(x-1)(x+1)$$

Nullstellen von p' : $0, 1, -1$

Vorzeichen von p'





2. Möglichkeit:

$$p''(x) = 24x^2 - 8 = 8(3x^2-1)$$

$$p''(1) = p''(-1) > 0 \quad , \quad p''(0) < 0$$

Satz 2.7. : 0 ist ein lok. Max., $1, -1$ lok. Min.

Satz 2.9 (Verallgemeinerter MWS)

Seien $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und in (a,b) diff'bar. Sei ferner $g' \neq 0$ in (a,b). Dann gilt $g(b) \neq g(a)$ und $\boxed{\exists \xi \in (a,b)}$ mit

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}}$$

Bem. MWS: $g(x) = x$

Beweis $g(b) \neq g(a)$ folgt aus Satz v. Rolle

Betrachte (wie im Beweis des MWS)

$$F(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot (g(x)-g(a))$$

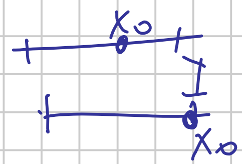
- F stetig in $[a,b]$ (als Differenz von solchen Fkt)
- F diff. in (a,b) — " —
- $F(a) = f(a) = F(b)$

Rolle: $\exists\, \xi \in (a,b)$: $F'(\xi) = 0$, d.h.,

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g'(\xi)$$

Satz 2.10 (L'Hospitalsche Regel) – eigentlich von (Johann) Bernoulli (?)

a) Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in I$ und $f, g : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ diff'bar mit $g' \neq 0$ in $I \setminus \{x_0\}$



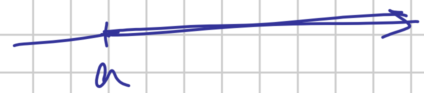
Ang.) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ oder beide $= \infty$

Dann gilt:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}} \quad (*)$$

falls der rechte Limes ex.

B) Seien $f, g : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ diff'bar mit $g' \neq 0$ in $[a,\infty)$



Ang.: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$ oder beide $= \infty$.

Dann gilt $(*)$ für $x \to \infty$ statt $x \to x_0$.

<u>Bem.</u> 1) Es geht also um Grenzwerte von der Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$.

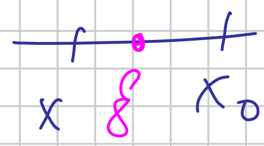
2) Für x_0 Randpunkt von I in (a) $\to$ einseitige Grenzwerte.

Bew. (a) Ang., $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$

Def. $f(x_0) := 0$, $g(x_0) := 0$, dann sind f, g stetig in x_0.

Verallg. MWS (2.9):

$\forall x \in I,\ x < x_0\ \exists\, \xi \in (x, x_0)$:



$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - \underbrace{f(x_0)}_{=0}}{g(x) - \underbrace{g(x_0)}_{=0}} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Da $x \nearrow x_0$ auch $\xi \nearrow x_0$ impliziert, gilt $(*)$ für $x \nearrow x_0$.
(Warum?)

Analog: $x \searrow x_0$.

Fall $\lim f = \lim g = \infty$: Hörsaalübung

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{\text{Substitution } y:=\frac{1}{x}}{=} \lim\limits_{y\searrow 0} \frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{g\left(\frac{1}{y}\right)} \overset{\text{nach (a) + Kettenregel}}{=} \lim\limits_{y\searrow 0} \frac{f'\left(\frac{1}{y}\right)\cdot\cancel{\left(-\frac{1}{y^2}\right)}}{g'\left(\frac{1}{y}\right)\cdot\cancel{\left(-\frac{1}{y^2}\right)}}$

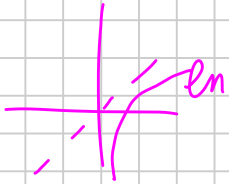
$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ■

$\boxed{\text{Bsp}}$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \overset{\text{L'Hospital } \left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1$

Analog: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} \overset{\frac{0}{0}\text{: L'Hospital}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\sin x}{1} = -\sin 0 = 0$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2-1}{5x^2+6x} \overset{\frac{\infty}{\infty}\text{, L'Hosp.}}{=} \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2x}{10x+6} \overset{\text{nochmal}}{=} \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

Bald beweisen wir: $\boxed{(e^x)' = e^x}$, $\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}}$



$$\lim_{x \searrow 0} x \ln x = \lim_{x \searrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x \searrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \searrow 0} (-x) = 0$$

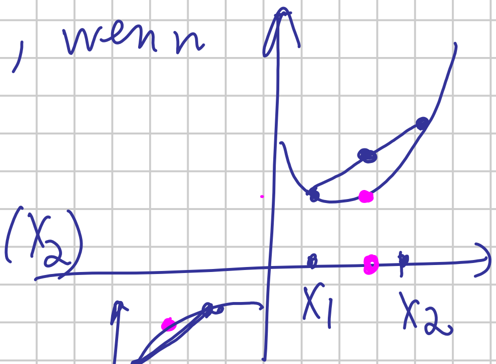
von der Form $0 \cdot (-\infty)$ $\qquad \frac{-\infty}{+\infty}$

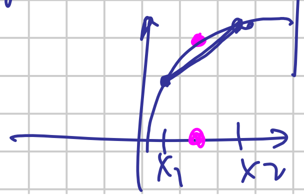
Forster – $\boxed{\text{Def 2.11}}$ Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall (endl. oder unendl.). Eine Fkt $f: I \to \mathbb{R}$ heißt **konvex** (bzw. **konkav**), wenn

$\forall x_1, x_2 \in I \quad \forall t \in (0,1)$

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq t f(x_1) + (1-t) f(x_2)$$

(bzw. $\geq$)





Bem. 1) Geom. Bedeutung:

Der Graph von f in $[x_1, x_2]$ liegt unterhalb (bzw. oberhalb) der Sekante durch $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$

2) f konkav $\Leftrightarrow -f$ konvex

3) f heißt streng konvex (bzw. streng konkav), wenn man $<$ $\forall\, x_1 \neq x_2$ (bzw. $>$ $\forall x_1 \neq x_2$)

Satz 2.12 Sei $I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ zweimal diff'bar in I. Dann gilt:

$$\boxed{f \text{ konvex (konkav)} \Leftrightarrow f''(x) \geq 0 \ (\leq) \quad \forall x \in I}$$

Bem. Insb. gilt:

$\boxed{f \text{ konvex (konkav)} \iff f' \nearrow (f' \searrow)}$