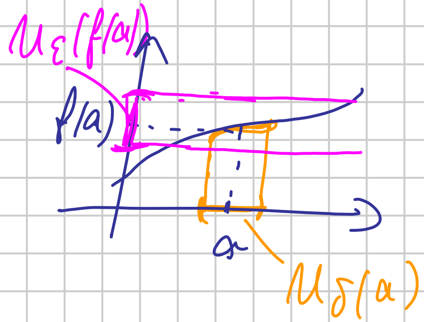
III Stetigkeit

1. Einführung

Def. 1.1 Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $a \in D$. Eine Fkt $f: D \to \mathbb{R}$ heißt
<u>stetig in a</u>, wenn

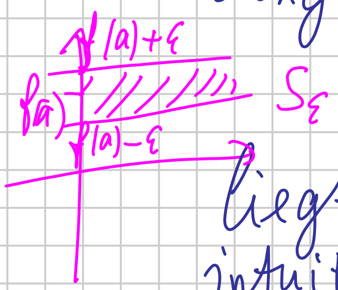
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad \forall x \in D \text{ gilt}$$
$$|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$



Analog für $\mathbb{C}$ statt $\mathbb{R}$.

<u>Bem.</u> Geometrische Bedeutung: $\forall\ \varepsilon$-Umgebung von $f(a)$ $\exists\ \delta$-Umge-

bung von a (in D), deren Bild unter f im Streifen



$$S_\varepsilon := \{(x,y) : y \in \underbrace{U_\varepsilon(f(a))}_{= (f(a)-\varepsilon,\, f(a)+\varepsilon) \text{ für } \mathbb{R}}\}$$

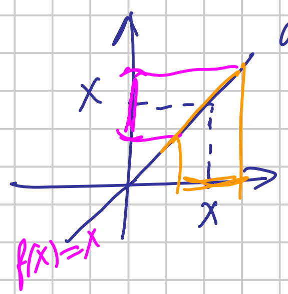
liegt.

intuitiv: kleine Änderungen von x implizieren kleine Änderungen von $f(x)$.

$\boxed{\text{Def. 1.2}}$ Eine Fkt $f: D \to \mathbb{R}$ (bzw. $f: D \to \mathbb{C}$) heißt stetig in D, wenn f in jedem Punkt $a \in D$ stetig ist.

Achtung δ hängt von ε und a ab!

$\boxed{\text{Bsp}}$ 1) Konstante Funktionen ($f(x) = c \ \forall x \in D$) sind stetig, da $f(x) - f(a) = 0 \ \forall a, x \in D$ gilt.



2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (bzw. $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$) mit $f(x) = x$ ist stetig in $\mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$):

$\forall \varepsilon \; \exists \delta := \varepsilon : \quad |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| = |x-a| < \varepsilon.$

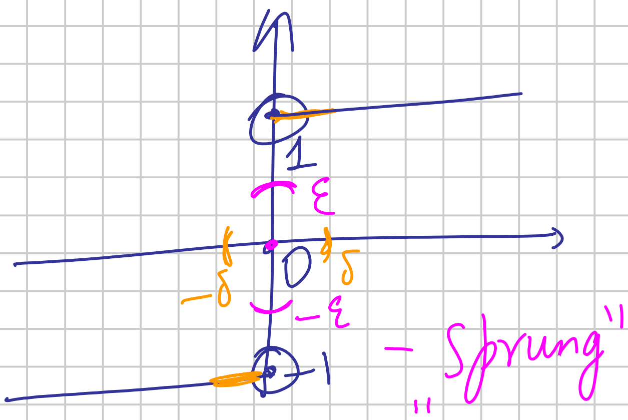
3) Die Fkt $\text{sign}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ def. durch

$$\text{sign}(x) := \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

ist nicht stetig in $a = 0$:

für $\varepsilon \ll 1 \; \nexists \delta \ldots$

(warum?)

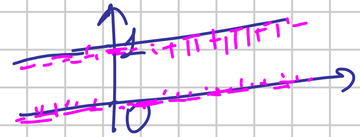


Bem.: Für die Stetigkeit von f in $a \in D$ ist nur das Verhalten von f „um a", d.h., in einer Umgebung von a wichtig.

Man sagt: „Stetigkeit ist eine <u>lokale</u> Eigenschaft."

$\boxed{\text{Bsp}}$ 1) Die Fkt $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



ist unstetig in jedem Punkt!

<u>Beweis</u>: Ang., f wäre stetig in $a \in \mathbb{R}$. Sei $\varepsilon := 1$.

Dann $\exists \delta > 0$ s.d. $\forall x$ $|x-a| < \delta \Rightarrow \underbrace{|f(x) - f(a)| < 1}$

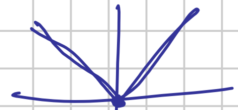
d.h. $f(x)$ hat denselben Wert wie $f(a)$, da f nur Werte 0 oder 1 annimmt.

Aber in $(a-\delta, a+\delta)$ gibt es sowohl rationale als auch irrat. Punkte

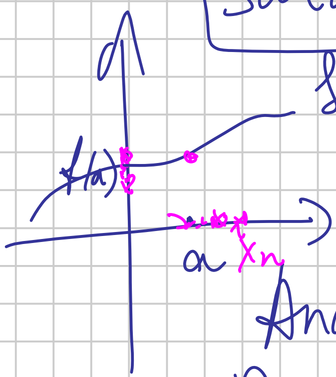
↯. ∎

2) $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (d.h. $f(x) := |x|$) ist stetig, da

$$||x|-|a|| \le |x-a|$$



gilt und $\delta := \varepsilon$ passt (warum?). Analog: $\mathbb{C}$ statt $\mathbb{R}$.



$\boxed{\text{Satz 1.3}}$ (Folgenkriterium für Stetigkeit)

Sei $D \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ und $f: D \to \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$f \text{ stetig in } a \iff \left(\forall (x_n) \subset D \text{ gilt: } x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(a) \right).$$

Folgenstetigkeit

Analoge Aussage gilt für $\mathbb{C}$ statt $\mathbb{R}$.

Beweis $\Rightarrow$ Ang., f ist stetig in $a \in D$, und sei $(x_n) \subset D$ mit $x_n \to a$. Z.z.: $f(x_n) \to f(a)$.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Def. der Stetigkeit!

$\exists \delta > 0 : \forall x \in D \ (|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$.

Da $x_n \to a$, $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \ |x_n - a| < \delta$,

also $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$.

$\Leftarrow$ Die Folgenstetigkeit sei erfüllt. Ang., f wäre nicht stetig in a, d. h.,

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0 \ \exists x \in D \text{ mit } |x-a| < \delta \text{ und } |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon_0.$$

Für $\delta := \frac{1}{n}$ def. x_n wie $\longrightarrow$. Wir haben

$$|x_n - a| < \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad |f(x_n) - a| \geq \varepsilon_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

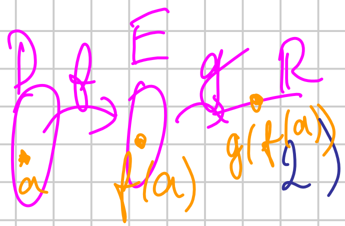
D. h., $\underbrace{x_n - a \longrightarrow 0}_{x_n \to a}$ und $\underbrace{f(x_n) - a \not\to 0}_{f(x_n) \not\to a}$. ↯

∎

Satz 1.4 (Rechenregeln für stetige Funktionen)

1) $f, g : D \to \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$) sind stetig in $a \in D \Rightarrow f+g$ und $f \cdot g$ stetig in a

Gilt außerdem $g(a) \neq 0$, so ist $g(x) \neq 0$ für alle x in einer Umgebung von a und $\frac{f}{g}$ ist stetig in a.



2) $D \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$), f stetig in a und g stetig in $f(a)$

$\Rightarrow \quad g \circ f : D \to \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$) stetig in a.

Beweis Benutze das Folgenkriterium 1.3:

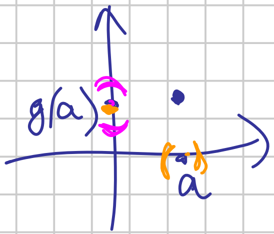
1) Sei $x_n \to a$. Nach Voraussetzung $f(x_n) \to f(a)$, $g(x_n) \to g(a)$.

Rechenregeln für Limes:

$$(f+g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(a) + g(a) = (f+g)(a)$$

Analog: $(f\cdot g)(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (f\cdot g)(a)$.

Folgenkrit.: $f+g$, $f\cdot g$ sind stetig in a.



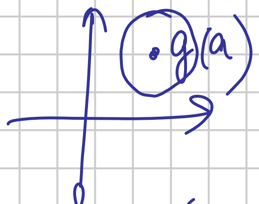
2. Teil: Sei $g(a) \neq 0$. Wir zeigen: $\exists \delta > 0: f(x) \neq 0$ $\forall x \in U_\delta(a) \cap D$.

Betr. z. B. $\varepsilon := \frac{|g(a)|}{2} > 0$.

Da g stetig ist, $\exists \delta > 0: \forall x \in D \quad |x-a| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \varepsilon = \frac{|g(a)|}{2}$

Also gilt für solche x

$$|g(x)| = |g(a) + (g(x) - g(a))| \underset{\text{umgek. }\Delta\text{-Ungl.}}{\geq} |g(a)| - \underbrace{|g(x) - g(a)|}_{< \frac{|g(a)|}{2}}$$

Für $\mathbb{C}$:  $\geq \frac{|g(a)|}{2} > 0$.

zz: $\frac{f}{g}$ ist stetig.

Sei $(x_n) \subset D$ mit $x_n \to a$. Dann $\exists N: \forall n \geq N \; g(x_n) \neq 0$

und $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \longrightarrow \frac{f(a)}{g(a)}$ (Folgenkrit. für f und g)

Folgenkrit.: $\frac{f}{g}$ stetig in a.

2) Ü (Folgenkrit.) $\blacksquare$

$\boxed{\text{Bsp } 1.5}$ 1) Polynome $P: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$)

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_d x^d$$

sind also stetig als Summe von Produkten von stet. Fkt.

2) Rationale Fkt. $f: D \to \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$) mit

$$f := \frac{p_1}{p_2}, \quad p_1, p_2 \text{ Polynome}$$

für $D := \{x : p_2(x) \neq 0\}$ sind stetig. (z.B. $\frac{x^{17}+20x}{x^2+x-17}$)

3) $|f| : D \to \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$) stetig, sobald f stetig ist.

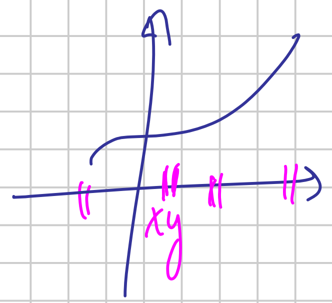
4) $\sqrt{\cdot} : [0,\infty) \to [0,\infty)$ ist stetig: Ü

(für $a \neq 0$ folgt das aus $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \left|\frac{x-a}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\right| \leq \frac{|x-a|}{\sqrt{a}}$)

Eine stärkere Eigenschaft:

$\boxed{\text{Def 1.6}}$ (Gleichmäßige Stetigkeit)

Sei $D \subset \mathbb{R}$. Eine Fkt $f: D \to \mathbb{R}$ heißt



gleichmäßig stetig, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \,, \; \forall x, y \in D \text{ gilt}$$

$$|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Bem. 1) Stetigkeit: $\forall \varepsilon > 0 \; \forall x \in D \; \exists \delta = \delta(\varepsilon, x)$:

$\forall y \in D$ gilt —"—

D.h., δ hängt jetzt nur von ε ab; egal, wo x und y liegt, Hauptsache, $|x-y| < \delta$

insbesondere gilt:

$$\boxed{f \text{ gleichm. stetig} \Rightarrow f \text{ stetig}}$$

($\not\Leftarrow$ - kommt gleich)

2) Gleichm. Stetigkeit ist eine „globale“ Eigenschaft, d.h., alle Werte von f sind wichtig.

$\boxed{\text{Bsp 1.7}}$ 1) f konst. $\Rightarrow$ gl. stetig

$f(x) = x$ ist gl. stetig in $\mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$):

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta := \varepsilon \; \forall x,y \; |x-y| < \delta \Rightarrow \underbrace{|f(x)-f(y)|}_{|x-y|} < \varepsilon$$

$$|x-y| < \varepsilon$$

$\Rightarrow \delta := \varepsilon$ passt

i. A. sind alle Fkt f mit der Eigenschaft

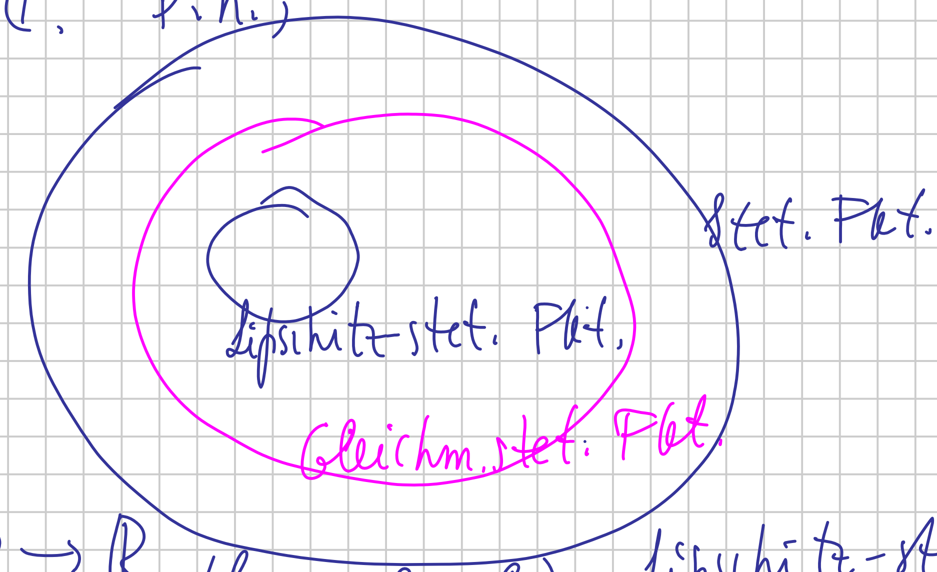
$$\exists C > 0: \; |f(x)-f(y)| \le C \cdot |x-y| \quad \forall x,y \in D$$

gleichm. stetig (nimm $\delta := \frac{\varepsilon}{C}$ – warum?)

Solche Fkt'en heißen <u>Lipschitz-stetig</u> (z.B. $f(x) = 5x$, $\sqrt{x}$ auf $[1, \infty)$)

Warum?

Analog für $\mathbb{C}$. D.h.,

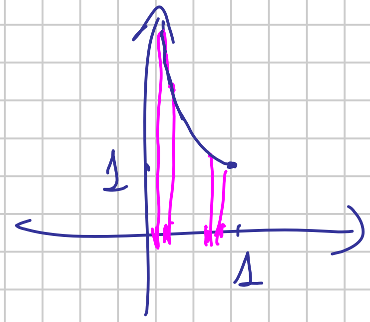


z.B. ist $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$) Lipschitz-stetig ($\Rightarrow$ gl. stetig)

– folgt aus

$$||x|-|y|| \leq |x-y|$$

3) $f : (0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{1}{x}$



stetig (als rat. Fkt.), aber <u>nicht</u> gleichm. stetig.

<u>Beweis</u> Ang., f wäre gl. stetig.

Dann $\exists$ zu $\varepsilon := 1$ ein $\delta > 0$ s.d.

$$\forall x, y \in (0,1], \quad |x-y| < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| < 1$$

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{2n} < \delta$, def. $x := \frac{1}{n}$, $y := \frac{1}{2n}$

Wir haben: $|x-y| = \frac{1}{2n} < \delta$, aber

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right| = |n-2n| = n \geq 1 \quad ↯ \qquad \blacksquare$$

$\boxed{\text{Satz 1.8}}$ Jede auf einem abgeschl. Intervall $[a,b]$ stetige Fkt $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ gleichm. stetig.

Beweis

Ang.) nicht gl. stetig:

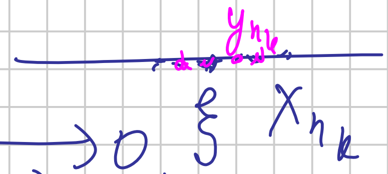
$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0 \; \exists x, y \in [a,b]$ mit $|x-y| < \delta$ und $|f(x)-f(y)| \geq \varepsilon$

D.h.) für $\forall n \in \mathbb{N}$ und $\delta := \frac{1}{n}$ $\exists x_n, y_n \in [a,b]$ mit $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ und $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$

Bolzano-Weierstraß!

$\exists$ konv. TF (x_{n_k}) von (x_n), sagen wir $x_{n_k} \to \xi$

Wir haben:



$$|y_{n_k} - \xi| \leq \underbrace{|y_{n_k} - x_{n_k}|}_{\leq \frac{1}{n_k} \to 0} + \underbrace{|x_{n_k} - \xi|}_{\to 0} \xrightarrow{k \to \infty} 0,$$

d.h., $y_{n_k} \to \xi$.

Folgenstetigkeit!

$$f(x_{n_k}) \to f(\xi)$$
$$f(y_{n_k}) \to f(\xi),$$

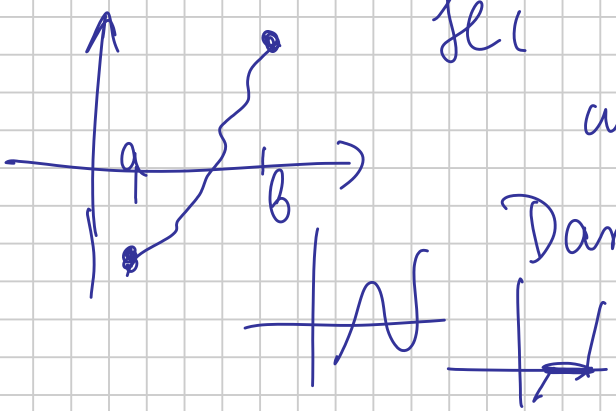
d.h., $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \leq \underbrace{|f(x_{n_k}) - f(\xi)|}_{\to 0} + \underbrace{|f(\xi) - f(y_{n_k})|}_{\to 0} \to 0$ ↯ ∎

2. Der Zwischenwertsatz und der Satz vom Maximum und Minimum

Weitere gute Eigenschaften stet. Fkt:

$\boxed{\text{Satz 2.1}}$ (Nullstellensatz von Bolzano)

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ (bzw. $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$),



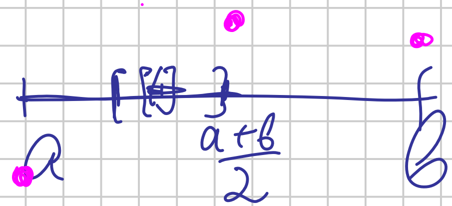
Dann hat f (mindestens) eine Nullstelle, d.h.,

$\exists x_0 \in \underbrace{[a,b]}_{\text{sogar } (a,b).}$ mit $f(x_0) = 0$.

__Beweis__ (Fall $f(a)<0$, $f(b)>0$ – der andere Fall analog oder: $g:=-f$)

(Wieder Löwe in der Wüste)

Def. Intervalle $I_n := [a_n, b_n]$ induktiv durch:



- $[a_1, b_1] := [a, b]$
- $[a_{n+1}, b_{n+1}] := \begin{cases} \left[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right], & \text{wenn } f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \geq 0 \\ \left[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n\right] & \text{sonst.} \end{cases}$

Wir haben eine Intervallschachtelung $\left(I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots \quad \text{Länge}(I_n) = \frac{b-a}{2^{n-1}} \longrightarrow 0 \right)$,

Nach dem IS'Prinzip $\exists!\, x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$, und $a_n \nearrow x_0$, $b_n \searrow x_0$

Da f stetig ist, gilt:

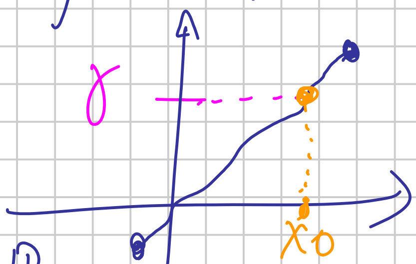
$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\underbrace{f(a_n)}_{<0}}_{\le 0} = f(x_0) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\underbrace{f(b_n)}_{>0}}_{\geq 0},$$

d.h., $f(x_0)=0$. $\blacksquare$

$\boxed{\text{Folgerung 2.2}}$ (Zwischenwertsatz: ZWS)

Eine stetige Fkt $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ nimmt jeden Wert γ zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an:

$$\exists x_0 \in [a,b]: \; f(x_0)=\gamma.$$



Beweis Betr. $g(x) := f(x)-\gamma$, $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig

Fall 1 $f(a)=f(b)$ oder $\gamma=f(a)$ oder $\gamma=f(b)$ – klar.

Fall 2 $f(a) \neq f(b)$, $\gamma \neq f(a)$, $\gamma \neq f(b)$

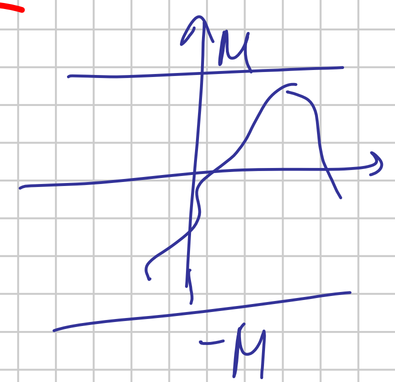
Dann gilt: • $g(a) = f(a) - \gamma$ und $g(b) = f(b) - \gamma$ haben untersch. Vorzeichen

• $g(x) = 0 \iff f(x) = \gamma$.

Nullstellensatz: $\exists x_0 : f(x_0) = \gamma$.

$\boxed{\text{Def. 2.3}}$ Eine Fkt $f : \underset{\subset \mathbb{R}}{D} \to \mathbb{R}$ heißt beschränkt, wenn $f(D) \subset \mathbb{R}$ beschr. ist, d.h.:

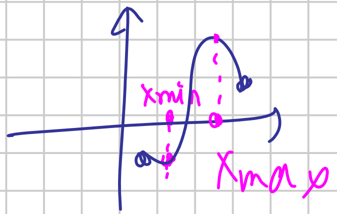
$\exists M \geq 0 : \forall x \in D \quad |f(x)| \leq M$.



$\boxed{\text{Satz 2.4}}$ (Satz vom Maximum und Minimum)

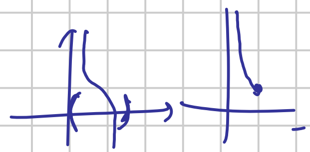
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f

beschränkt und f besitzt ein Maximum und ein Minimum, d.h., $\exists\, x_{min}, x_{max} \in [a,b]$ mit



$$f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max}) \quad \forall x \in [a,b]$$

__Bem.__ Für $(a,b]$, $[a,b)$, (a,b) falsch i.A.;

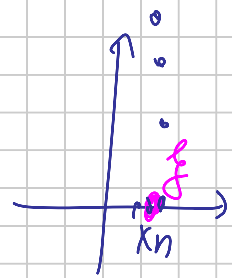


__Beweis__ (Beschr. nach oben und $\exists\, x_{max}$ – Rest analog oder $g := -f$).

__Teil 1__: f beschr. nach oben.

Ang., nicht! $\forall M \geq 0 \;\; \exists x \in [a,b]: \; f(x) \geq M$.

Für $\forall n \in \mathbb{N}$ und $M := n \;\; \exists x_n: \; f(x_n) \geq n$



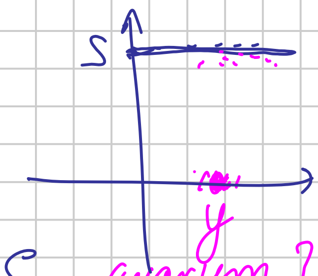
B.-W.: $\exists$ konv. TF (x_{n_k}): $x_{n_k} \to \xi \in [a,b]$

Folgenkrit.: $f(x_{n_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(\xi)$ $\lightning$ $(f(x_n) \geq n)$.

Teil 2: Existenz von x_{min}, x_{max}

Nach Teil 1

$$\exists\, s := \sup f([a,b])$$



Def. des Sup's: $\exists (y_n) \subset [a,b]$ mit $f(y_n) \to s$ (warum?)

B.-W.: $\exists\, (y_{n_k})$ konv. TF: $y_{n_k} \to y$ für ein $y \in [a,b]$

Folgenkrit.: $f(y_{n_k}) \to f(y)$, aber $f(y_{n_k}) \to s$, d.h.,

$$s = f(y).$$

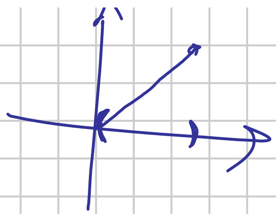
Also passt $x_{max} := y$. (x_{min} analog) ■

$\boxed{\text{Bsp}}$ (abg. Intervall: wichtig)

1) $f: (0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$

stetig, aber unbeschr. $\left(f\left(\frac{1}{n}\right) = n \to \infty\right)$

2) $f: (0,1) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$
stetig, nimmt aber weder inf. noch sup. an.



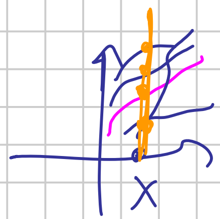
<u>Bem.</u> ZWS + Satz vom Max und Min

$\Rightarrow \quad f([a,b]) = \underbrace{[f(x_{min}), f(x_{max})]}_{\text{auch ein abg. intervall!}}$,

wenn f in $[a,b]$ stetig ist (warum?)

3. Gleichmäßige Konvergenz und Stetigkeit von Grenzfunktionen und Umkehrfunktionen.

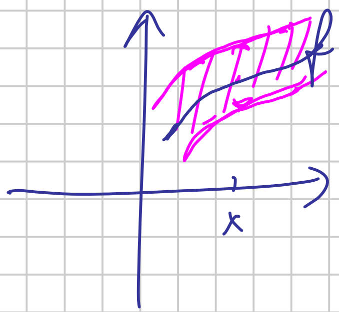
Def. 3.1 Seien $D \subset \mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$ und (f_n) eine Funktionenfolge auf D, d.h. $\forall n \; f_n : D \to \mathbb{R}$.



- (f_n) heißt <u>punktweise konvergent</u> gegen f, wenn

$$f_n(x) \to f(x) \quad \forall x \in D.$$

In diesem Fall heißt f <u>Grenzfkt</u> von (f_n)



- (f_n) heißt <u>gleichmäßig konv.</u> gegen f, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \; \underline{\forall x \in D}$$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

(d.h., N hängt nicht von x ab!)

Schreibe: $f_n \xrightarrow{gl} f$ (oder: $f_n \rightrightarrows f$)

Bem. 1) Graphisch heißt gl. konv.:
$\forall \varepsilon > 0$ liegen alle f_n ab einem Index N im ε-Schlauch um f.

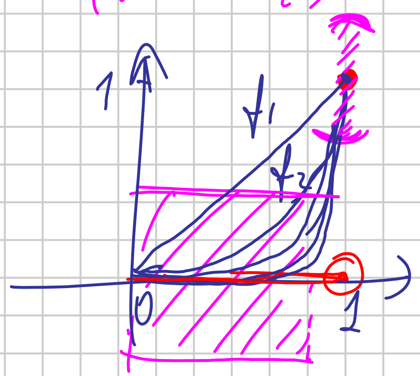
2) Man kann wieder statt ε auch $5 \cdot \varepsilon$, $c \cdot \varepsilon$, ε^2, … schreiben. (warum?)

3) Analoge Def. für $\mathbb{C}$ statt $\mathbb{R}$

4) Gleichm. Konv. $\Rightarrow$ punktw. Konv. (warum?)
$\not\Leftarrow$:

$\boxed{\text{Bsp 3.2}}$ $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$

- f_n konv. punktw. gegen
$$f(x) := \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$



da $x^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ für $x \in [0,1)$ und $1^n = 1$ $\forall n$.

- f_n konv. nicht gleichm. gegen f:
  sei $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$. Dann $\exists$ zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_0 \in [0,1]$:
  $$x_0^n = \frac{1}{2} \quad (\sqrt[n]{\tfrac{1}{2}} \text{ oder ZWS})$$
  und damit gilt
  $$|f_n(x_0) - f(x_0)| = \frac{1}{2} > \varepsilon$$
  $\Rightarrow$ kein gl. konv. (warum?)

Satz 3.3 Seien $D \subset \mathbb{R}$ und $f, f_1, f_2, \ldots : D \to \mathbb{R}$. Wenn alle f_n stetig in D sind und $f_n \xrightarrow{gl.} f$, dann ist f auch stetig.

(D.h., gl. Limes stetiger Fkt'en ist stetig),

Analoge Aussage gilt für $\mathbb{C}$ statt $\mathbb{R}$.

Bem.: Falsch für punktw. Limes: Bsp davor.

Bew. Sei $a \in D$. Zz: f stetig in a.

Sei $\varepsilon > 0$. Gl. Konv. von (f_n) impliziert insb.:

(∗) $$\exists N : \forall x \in D \quad |f_N(x) - f(x)| < \varepsilon/3.$$

Da dieses f_N stetig in a ist,

(∗∗) $$\exists \delta > 0 : \forall x \in D \quad \left(|x-a| < \delta \Rightarrow |f_N(x) - f_N(a)| < \varepsilon/3\right).$$

Für solche x haben wir (Δ-Ungl.)

$$|f(x) - f(a)| \le \underbrace{|f(x) - f_N(x)|}_{\substack{<\varepsilon/3 \\ \text{nach } (*)}} + \underbrace{|f_N(x) - f_N(a)|}_{\substack{<\varepsilon/3 \\ \text{nach } (**)}} + \underbrace{|f_N(a) - f(a)|}_{\substack{<\varepsilon/3 \\ \text{nach } (*)}}$$

$< \varepsilon$

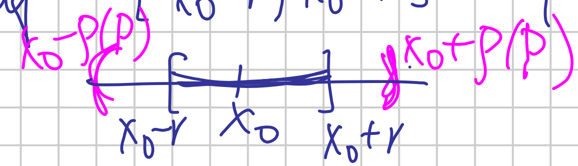
Also ist f stetig in a. ∎

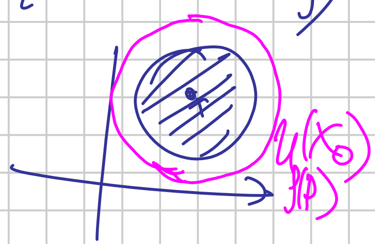
Satz 3.4 (Gleichm. Konv. und Stetigkeit von Potenzreihen)

Sei $P(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ eine P'Reihe mit Konvergenzradius $\rho(P) \neq 0$ (∞ zugelassen). Dann konv. die Partialsummen (S_N) gegeben durch

$$S_N(x) := \sum_{n=0}^{N} a_n (x-x_0)^n$$

gleichmäßig gegen P auf $[x_0 - r, x_0 + r]$ (bzw. $\{z : |z - x_0| \leq r\}$) $\forall r < \rho(P)$.





Insb. ist P stetig in $\mathcal{U}_{\rho(P)}(x)$.

Beweis Gl. Konv. folgt aus:

$$|P(x) - S_N(x)| \underset{\text{Reihe konv. in } U_{\rho(P)}(x_0)}{=} \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \right| \underset{\text{wenn } |x-x_0| \le r}{\le} \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \cdot r^n \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

da $P(x_0+r)$ konv.

hängt nicht mehr von x ab!

Wähle zu $\forall \varepsilon > 0$ N_0 s.d. $\forall N \ge N_0$ $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} |a_n| r^n < \varepsilon$.

(dann gilt $\forall x$ mit $|x-x_0| \le r$:
$|P(x) - S_N(x)| < \varepsilon$.)

Stetigkeit von P in $\{x : |x-x_0| \le r\}$ folgt aus Satz 3.3

$\forall r < \rho(P)$ $\Rightarrow$ Stetigkeit in $\bigcup\limits_{r<\rho(P)} \{x : |x-x_0| \le r\} = U_{\rho(P)}(x_0)$. $\blacksquare$

da Stet. = Stet. in $\forall$ Punkt

Bem. Achtung: $P(\cdot)$ konv. i.A. nicht gleichm. in $U_{\rho(P)}(x_0)$

Tutorium.

$\boxed{\text{Satz 3.5}}$ (Stetigkeit der Umkehrfkt)

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und streng $\nearrow$ (bzw. $\searrow$)

Dann ist die Umkehrfkt $f^{-1} : \underbrace{\text{Bild}(f)}_{\text{auch ein Intervall } [c,d]} \to [a,b]$ ebenfalls stetig und streng $\nearrow$ (bzw. $\searrow$).

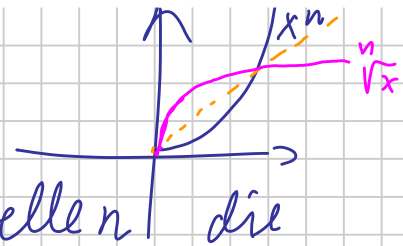
Beweis. Monotonie: klar (?)

$\left(x_1 < x_2 \Rightarrow \underbrace{f(x_1)}_{=:y_1} < \underbrace{f(x_2)}_{=:y_2} \right)$

Stetigkeit: Tutorium "$\blacksquare$" :-)

$\boxed{\text{Bsp}}$: $\sqrt[n]{\cdot} : [0,\infty) \to [0,\infty)$ ist als Umkehrfkt von $x \mapsto x^n$ stetig $\forall n \in \mathbb{N}$.

Mehr über elementare Funktionen



Als Potenzreihen mit Konv'Radius ∞ stellen die Sinus-, Kosinus- und Exp'-Reihen

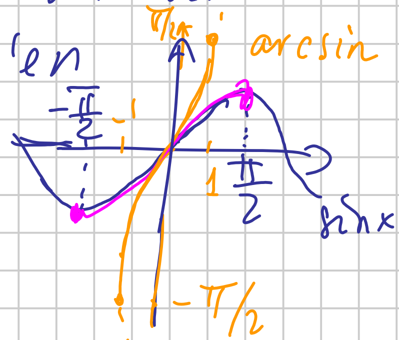
$$\sin(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\exp(x) := e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

stetige Fkt'en dar.

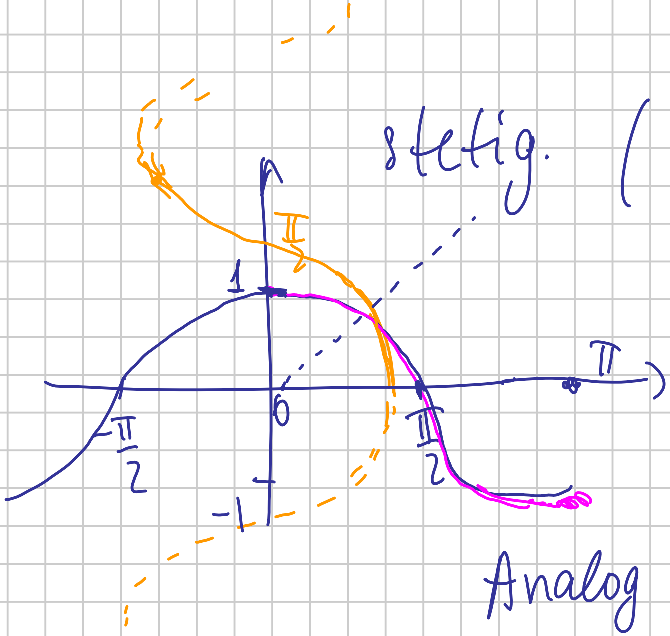
Wir werden später besprechen, dass $\sin(x)$ und $\cos(x)$ mit den klassischen trig. Fkt'en $\sin(x)$, $\cos(x)$ aus der Schule übereinstimmen. Damit sind die Umkehrfkt'en



$\arcsin: [-1,1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

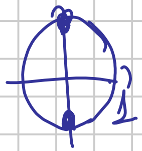
$\arccos: [-1,1] \longrightarrow [0, \pi]$

stetig. (genauso wie für andere Intervalle, wo sin monoton ist)



<u>Bem.</u> Man kann die Stet. von sin und cos auch aus den Formeln für $\sin x - \sin y$ und $\cos x - \cos y$ ableiten.

Analog sind damit auch



$\tan = \frac{\sin}{\cos} : \mathbb{R} \setminus \{ \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \} \longrightarrow \mathbb{R}$,

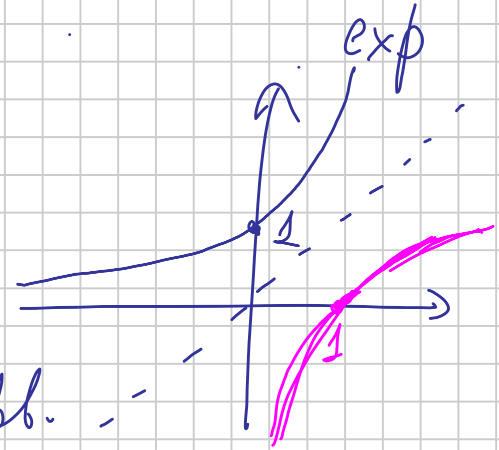
$\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ (bzw. andere Intervalle)

Exp'Fkt/Logarithmus

Da $\exp: \mathbb{R} \to (0,\infty)$ stetig, monoton

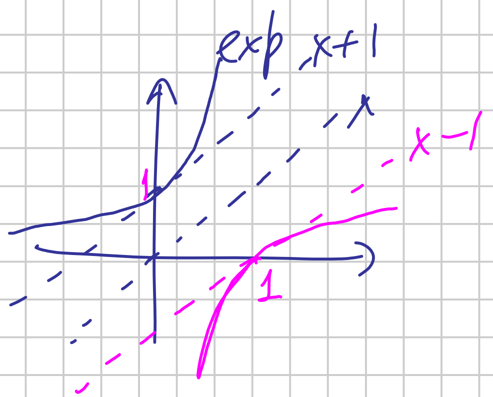
mit $e^n \to \infty$, $e^{-n} \to 0$ ist, ist

sie bij (ZWS) mit stet. Umkehrabb.



$\ln : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ – natürlicher Logarithmus

Der Logarithmus erfüllt die folg. „dualen" Eigenschaften zur Exp' Fkt:



- $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$
- $\left.\begin{array}{l} \ln(ab) = \ln a + \ln b \\ \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b \end{array}\right\} \forall a, b > 0$
- $\ln(x^n) = n \cdot \ln x \quad \forall x > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$
- $\ln(1+x) < x \quad \forall x > -1$ mit $x \neq 0$
- $\ln n \to +\infty$, $\ln\left(\frac{1}{n}\right) \to -\infty$
- $\ln x$ wächst langsamer als jede Wurzel: $\forall n$ $\forall$ große x gilt $\ln x < \sqrt[n]{x}$

hängt von n ab

Bew. folgt direkt aus den Eigensch. der Exp-Fkt: Ü / Hörsaalübung

Man kann jetzt <u>allgemeine Potenzen</u> def.:

$$\boxed{x^y := e^{y \ln x}} \quad \forall x, y > 0 \quad (z.B.\ e^{\pi})$$

Wir haben:

- $x^n \underset{\text{unsere Def}}{=} e^{n \ln x} = e^{\ln(x^n)} = x^n$ – klassische Potenzen ok!

Ü / Hörsaalübung

- $(x_1 \cdot x_2)^y = x_1^y \cdot x_2^y$

  $(x^{y_1})^{y_2} = x^{y_1 \cdot y_2}$
- $x^{y_1 + y_2} = x^{y_1} \cdot x^{y_2}$, $x^0 = 1$, $x^{-y} = \frac{1}{x^y}$
- Auch für $y \in \mathbb{Q}$ bekommt man

klassische Wurzeln / rat. Potenzen.

<u>Bem.</u> Analog ist $x \mapsto 10^x$ streng $\nearrow$, stetig und bij. (Warum?)
Die Umkehrabb. ist
$$\log_{10} : (0,\infty) \to \mathbb{R}$$
und erfüllt $\log_{10} x = \frac{\ln x}{\ln 10}$: ü

Analog: $x \mapsto b^x$ $\forall b$.

<u>Bem.</u> Man kann Grenzwerte oft leicht berechnen, z.B.

$\ln n < \sqrt{n}$ für große n

$$\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \cdot \ln n} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^0 = 1$$

$\frac{1}{n} \cdot \ln n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

da exp stetig

Weitere wichtige Fakten über ln!

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^a} = 0 \quad \forall a>0}$$ – da $\ln n < n^{\frac{a}{2}}$ für große n

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^a} \text{ konv.} \iff a>1}$$ – ohne Beweis

insb. divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$.

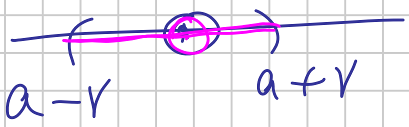
4. Grenzwerte von Funktionen

Def. 4.1 a) Für $a \in \mathbb{R}$, $r > 0$ def.

$$\dot{U}_r(a) := \{x \in \mathbb{R} \setminus \{a\} : |x-a| < r\}$$

$$= U_r(a) \setminus \{a\}$$

– punktierte r-Umg. von a.



b) Für $D \subset \mathbb{R}$ heißt $a \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt (HP) von D, wenn gilt

$$\exists (x_n) \subset D \setminus \{a\} : \quad x_n \to a$$

Achtung: $a \in D$ möglich, $a \notin D$ möglich

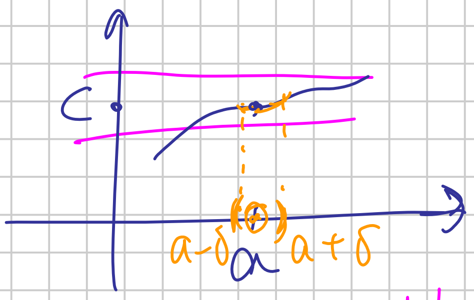
Bsp

$HP(0,1] = [0,1]$

$HP\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$

$HP(\mathbb{N}) = \emptyset$

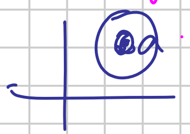
c) Sei $D \subset \mathbb{R}$, a ein HP von D und $f: D \to \mathbb{R}$.
Wir sagen: f besitzt den Grenzwert $c \in \mathbb{R}$ für $x \to a$



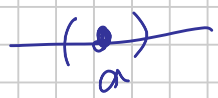
(Schreibe: $\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = c}$ oder $\boxed{f(x) \xrightarrow[x \to a]{} c}$), wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall x \in \dot{U}_\delta(a) \cap D : \ |f(x) - c| < \varepsilon.$$

Achtung: $a \notin D$ möglich, d.h. $\nexists f(a)$
auch $\exists f(a)$ möglich, aber $f(a)$ spielt keine Rolle.

Analoge def. für $\mathbb{C}$ statt $\mathbb{R}$ ($\dot{U}_\delta(a)$: )

Bem. Sei $a \in D$. Es gelten:



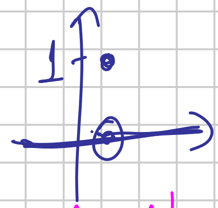
a) a ist kein HP von $D \iff a$ ist isoliert in D, warum?

d.h., $\exists r > 0 \quad \dot{U}_r(a) \cap D = \emptyset$

b) Sei $f: D \to \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$) und a ein HP von D, dann gilt nach Def.:

$$\boxed{f \text{ stetig in } a \iff \lim_{x \to a} f(x) = f(a)}$$

Bem. Wenn $\exists \lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$, dann heißt a hebbare Unstetigkeitsstelle von f



(f wird stetig durch geschickte Veränderung von $f(a)$)

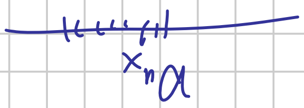
Def. 4.2 (Einseitige Grenzwerte)

Sei $D \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ ein HP von D. (Ang.)

wichtig

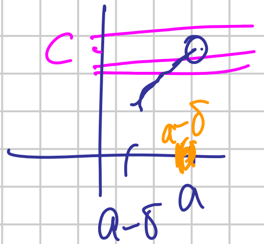
$\exists (x_n) \subset D \setminus \{a\}$ mit

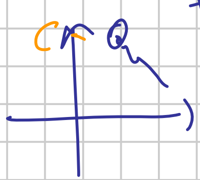
$$\begin{cases} x_n < a \ \forall n \ (\text{bzw. } x_n > a \ \forall n) \\ x_n \to a \end{cases}$$



Man sagt: f besitzt in a den linksseitigen (bzw. rechtsseitigen) Grenzwert $c \in \mathbb{R}$, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in (a-\delta, a) \cap D \ (\text{bzw. } (a, a+\delta)) \quad |f(x) - c| < \varepsilon.$$





Schreibe: $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = c}$ (bzw. $x > a$) oder $\boxed{\lim\limits_{x \to a-} f(x) = c}$ (bzw. $a+$) oder $\boxed{f(a-) = c}$ (bzw. $f(a+) = c$)

Es gilt: $\exists \lim_{x \to a} f(x) \iff \exists f(a-),\ \exists f(a+)$ und $f(a-) = f(a+)$

Wenn dazu $a \in D$, dann hat man:

f stetig in $a \iff \exists f(a+), f(a-)$ und $f(a-) = f(a) = f(a+)$

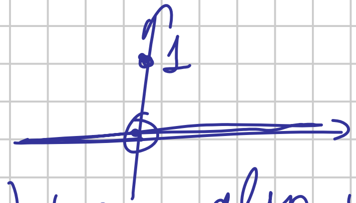
Man sagt: f

- ist <u>linksstetig</u> in a, wenn $f(a-) = f(a)$
- — " — rechtsstetig — " — $f(a+) = f(a)$
- hat eine <u>Sprungstelle in a</u>, wenn $\exists f(a+), f(a-)$, aber $f(a+) \neq f(a-)$.

Die Differenz $f(a+) - f(a-)$ heißt <u>Sprung</u> von f in a!

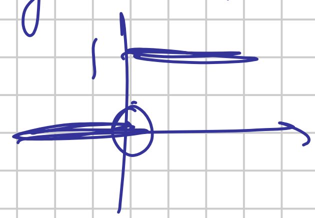
$\boxed{\text{Bsp}}$

1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$



$f(0-) = 0 = f(0+)$, aber $f(0) \neq 0$, also ist f weder links- noch rechtsstetig in 0.

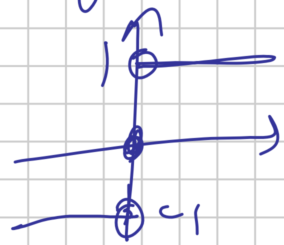
2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$



$f(0-) = 0$, $f(0+) = 1 = f(0)$

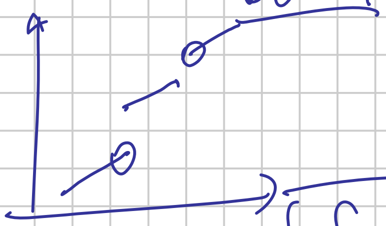
$\Rightarrow f$ rechtsstetig, nicht linksstetig., Sprung $= 1$

3) $\text{sign}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad \text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$



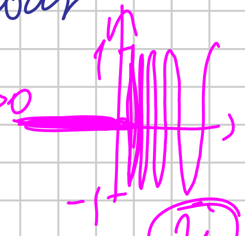
$f(0-) = -1$, $f(0+) = 1$, $f(0) = 0$

Sprung $= 2$, weder links- noch rechtsstetig



Bem. Monotone Fkt'en haben nur Sprungstellen als Unstetigkeitsstellen und nur höchstens abzählbar viele solche. – ohne Beweis

$\boxed{\text{Bsp}}$ (sonst falsch) $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$



Ü

$\boxed{\text{Satz 4.3}}$ (Folgenkrit. für Grenzwerte von Fkt'en)

Sei $f: D \overset{\subset \mathbb{R}}{\longrightarrow} \mathbb{R}$, $a \in D$, $c \in \mathbb{R}$. Es gilt:

$$\lim_{x \to a} f(x) = c \iff \forall \text{ Folge } (x_n) \subset D \setminus \{a\} \; (x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to c)$$