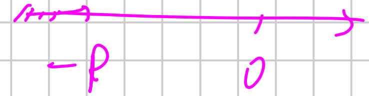
Notiztitel 06.12.2018

Erinnere: $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ (bzw. $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$), wenn

$\forall R > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}: \quad \forall n \geq N \quad x_n > R$

(bzw. $x_n < -R$)

egal, wie groß



(Ein paar) Rechenregeln 1.25

Seien $(a_n), (b_n), (c_n) \subset \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$ mit

$$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty, \quad b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty, \quad c_n \xrightarrow[n\to\infty]{} c.$$

Dann gelten:

- $a_n + b_n \longrightarrow +\infty$, kurz: $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$

  (es reicht: (b_n) beschr. insb. gilt:

  $a_n + c_n \longrightarrow +\infty$ kurz: $(+\infty) + c = +\infty$

- $c_n \cdot a_n \longrightarrow \begin{cases} +\infty, & \text{wenn } c > 0 \\ -\infty, & \text{wenn } c < 0 \end{cases}$ kurz: $c \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty & (c>0) \\ -\infty & (c<0) \end{cases}$

- $a_n \cdot b_n \longrightarrow +\infty$ kurz: $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$.

- $\dfrac{c_n}{a_n} \longrightarrow 0$ kurz: $\dfrac{c}{+\infty} = 0$

  (es reicht hier, (c_n) beschr.)

<u>Bew.</u>: Ü / Hörsaalübung

<u>Achtung</u>: $a_n - b_n$ - i.A. nicht klar kurz: $(+\infty) - (+\infty)$ nicht def.

Bsp $n^2 - n \to +\infty$ $\qquad n - n = 0$

$n - n^2 \to -\infty$ $\qquad (n + (-1)^n) - n = (-1)^n$ div.

Achtung Auch $\frac{a_n}{b_n}$ i. A. nicht klar. $\frac{\infty}{\infty}$ nicht def.

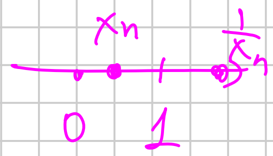
Bsp $\frac{n^2}{n} \to +\infty$, $\frac{n}{n^2} \to 0$, $\frac{n}{n} \to 1$, Div. möglich: Ü

Ü $0 \cdot (\pm\infty)$

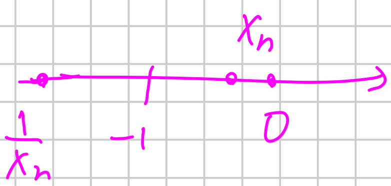
Man nennt $(+\infty) - (+\infty)$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $0 \cdot (\pm\infty)$ unbestimmte Ausdrücke, da ihnen kein Sinn zugeschrieben werden kann (i. A.).

Satz 1.26 (a) Für $(x_n) \subset (0, \infty)$ gilt

$$x_n \to 0 \iff \frac{1}{x_n} \to +\infty$$



Analog: für $(x_n) \subset (-\infty, 0)$ gilt

$x_n \to 0 \iff \dfrac{1}{x_n} \to -\infty.$ 

(kurz: $\dfrac{1}{+0} = +\infty$, $\dfrac{1}{-0} = -\infty$)

Beweis: Ü / Hörsaalübung

Achtung: $x_n \to 0 \not\Rightarrow \dfrac{1}{x_n}$ best. divergent

$\boxed{\text{Bsp}}$ $x_n = \dfrac{1}{(-1)^n n} \to 0$ $\quad \cancel{(\pm 1)}\ 0 \quad$ $\dfrac{1}{x_n} = (-1)^n n$ nicht best. div.!

Bem. Man def. uneigentliche Häufungspunkte und uneigentliche Suprema und Infima wie folgt:

$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n = +\infty$, falls (x_n) nicht nach oben beschr.

($\iff \exists$ TF (x_{n_k}) mit $x_{n_k} \to +\infty$)

$\underline{\lim_{n\to\infty} x_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} x_n = -\infty}$, falls –"– nach unten –"–

(($\Leftarrow$) –"– $x_{n_k} \to -\infty$)

Auch bei einer Menge $M \subset \underline{\mathbb{R}}$ setzen wir (warum?)

$\underline{\sup M = +\infty}$ (bzw. $\underline{\inf M = -\infty}$), wenn M nicht nach oben (bzw. unten) beschr. ist.

2. Reihen

$\boxed{\text{Def. 2.1}}$ Sei $(a_n) \subset \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ eine Folge. Def.

$$S_N := \sum_{n=1}^{N} a_n = a_1 + \dots + a_N, \quad N \in \mathbb{N}$$

Die zugeh. <u>Reihe</u> ist eine <u>formale</u> Summe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots .$$

Man sagt, dass die Reihe gegen s konv. (schreibe $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$), wenn

$$s = \lim_{N\to\infty} s_N = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n .$$

s_N heißt <u>N-te Partialsumme</u> der Reihe und s die <u>Summe</u> der Reihe. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ <u>divergiert</u>, wenn sie nicht konv.

Schreibe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konv.

Bem.: Analog def. man $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ für $m \in \mathbb{Z}$ (z.B. $\sum_0^{\infty} \ldots$).

$\boxed{\text{Def. 2.2}}$ 1) Für $(a_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ heißt die Reihe

nach Def. ~~Abb.~~ $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$$

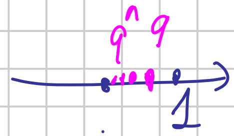
konvergent, wenn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} < \infty$,

und die **Summe** $:= \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}$.

2) Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt **absolut konvergent**, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$. Analog für $\sum_{n=m}^{\infty}$ oder $\sum_{n=-\infty}^{\infty}$.

$\boxed{\text{Bsp 2.3}}$ 1) $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ div. : $S_N = N \to \infty$

2) Sei $q \in \mathbb{C}$. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ heißt geometrische Reihe. Konv.?



Fall 1 $|q| < 1$.

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} q^n = 1 + q + \dots + q^N \overset{\uparrow}{=} \frac{1 - q^{N+1}}{1-q} \longrightarrow \frac{1}{1-q},$$

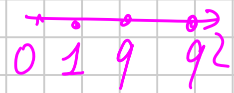
erinnere (Induktion)

$q^{N+1} \to 0$

d.h.: $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \text{ für } |q| < 1}$

unbeschr. ($|q|^{N+1} \to \infty$)

Fall 2 $|q| > 1$. Dann ist $S_N = \frac{1 - q^{N+1}}{1-q}$



- unbeschr. $\Rightarrow$ Divergenz der Reihe

<u>Fall 3</u> $|q| = 1$. Die Reihe divergiert nach der

$\boxed{\text{Prop. 2.4}}$ (**Notwendige Bedingung der Konv. von Reihen**)

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konv.} \Rightarrow a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

<u>Beweis</u> $a_n = \underbrace{S_n}_{\to s} - \underbrace{S_{n-1}}_{\to s} \longrightarrow s - s = 0.$ ∎

Zurück zum Bsp oben: $|q| = 1 \Rightarrow |q^n| = 1 \not\to 0$

$\boxed{\text{Bsp. 2.5}}$ Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ heißt **harmonische Reihe**

Wir zeigen: sie div.

Sei $N = 2^\ell$ für $\ell \in \mathbb{N}$ und $S_N := \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$. Dann gilt:

$$S_N = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{\geq 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}\right)}_{\geq 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}} + \dots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^{\ell-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^\ell}\right)}_{\geq 2^{\ell-1} \cdot \frac{1}{2^\ell} = \frac{1}{2}}$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} \cdot \ell \xrightarrow[\ell \to \infty]{} +\infty.$$

D.h.) $S_N \nearrow \infty$ und die Reihe div. $\blacksquare$

<u>Bem.</u>: 1) insb. $\not\Leftarrow$ in Prop. 2.4 i.A. $\left(\frac{1}{n} \to 0, \text{ aber } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ div}\right)$

2) Seien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b$ und $c \in \mathbb{C}$. Dann:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = a + b, \quad \sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

(insb. konv. beide Reihen) (Warum?

$\boxed{\text{Bsp}}$ (Dezimaldarstellung)

Sei $x = 0,a_1 a_2, \dots \in [0,1]$ – Dezimaldarst.

Behauptung: $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \dots$

Beweis $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{10^n} = 0,a_1 a_2 \dots a_N \nearrow x$ (schon bewiesen) ∎

Bem. Allgemein gilt: Sei $a_n \geq 0 \ \forall n$. Dann gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \Leftrightarrow \text{Partialsummen } (S_N) \text{ beschr.}$$

(Grund: $S_N \nearrow$)

Kriterien für konv.?

Satz 2.6 (Cauchykriterium)

Sei $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Dann gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq m \geq N \quad \left| \sum_{j=m}^{n} a_j \right| < \varepsilon.$$

(d.h. $\sum_{j=m}^{n} a_j \xrightarrow{n,m\to\infty} 0$)

Beweis (S_N) konv. $\underset{\text{Cauchykr. für Folgen}}{\iff}$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}: \forall n, m \geq N$

$$|\underbrace{S_n - S_m}_{\sum_{j=m+1}^{n} a_j}| < \varepsilon$$

wenn $n > m$ (OBdA)

Folgerung 2.7 (Majorantenkriterium).

Seien $(a_n) \subset \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, $(b_n) \subset [0, \infty)$ mit

$$\boxed{|a_n| \leq b_n \quad \forall n.}$$

Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konv., dann konv. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ und

$$\boxed{\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n.}$$

(d.h., $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konv. absolut)

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ heißt dabei <u>Majorante</u> von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (und $\sum a_n$ heißt <u>Minorante</u>)

<u>Beweis</u> Die Aussage über Konvergenz folgt aus

$$\left| \sum_{j=m}^{n} a_j \right| \leq \sum_{j=m}^{n} |a_j| \leq \sum_{j=m}^{n} b_j \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$$

Δ-Ungl.

(Cauchykrit.)

Die Aussage über die Summen folgt aus:

$$\left|\sum_{n=1}^{N} a_n\right| \underset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \sum_{n=1}^{N} |a_n| \leq \sum_{n=1}^{N} b_n \quad \forall N$$

$N \to \infty$: ✓. ∎

<u>Bem.</u> Für $b_n := |a_n|$ bekommen wir:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konv. absolut} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konv.}}$$

Folgerung 2.8 (Minorantenkriterium)

Wenn $\boxed{|a_n| \leq b_n \ \forall n}$, dann gilt:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ div.} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ div.}}$$

$\boxed{\text{Bsp } 2.9}$ $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} \begin{cases} \text{konv.}, & \text{wenn } a>1 \\ \text{div.}, & \text{wenn } 0 \leq a \leq 1. \end{cases}}$

($a=1$ – harmonische Reihe).

Beweis **Fall 1** $a \leq 1$. Es gilt:

$$S_N = 1 + \frac{1}{2^a} + \dots + \frac{1}{N^a} \geq \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N}}_{\text{harmonische Reihe}} \longrightarrow \infty,$$

also Divergenz (Minoranten krit.)

Fall 2 $a > 1$. Beobachtung:

$$S_{2^m-1} = 1 + \underbrace{\left(\frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a}\right)}_{\leq 2 \cdot \frac{1}{2^a} = \frac{1}{2^{a-1}}} + \dots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^{(m-1)a}} + \dots + \frac{1}{(2^m-1)^a}\right)}_{\leq 2^{m-1} \cdot \frac{1}{2^{(m-1)a}} = \frac{1}{2^{(m-1)(a-1)}}}$$

$$\leq 1 + \frac{1}{2^{a-1}} + \dots + \left(\frac{1}{2^{a-1}}\right)^{m-1}$$

$$\leq \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{a-1}}} \quad \forall m.$$

geom. Reihe für $q := \frac{1}{2^{a-1}}$

Die Folge $(S_n) \nearrow$ und hat eine beschr. TF

$\Rightarrow$ (S_n) beschr., also konv. (da $\uparrow$) $\blacksquare$

Warum?

<u>Bem.</u>: Konvergenz einer Reihe hängt nicht von ersten endlich vielen a_n ab (Cauchykriterium), aber die Summe der Reihe schon!

Noch ein Bsp zum Majorantenkrit.:

Bsp 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} < \infty$, da

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}{n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n} \le \frac{2}{n^2} \quad \forall n.$$

Da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konv. (Bsp. 2.9), konv. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ nach dem Majorantenkrit.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ div., da

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{n}$$

und $\sum \frac{1}{n}$ div. (harm. Reihe) – Minorantenkrit.

Satz 2.10 Sei (a_n) eine monotone Nullfolge. Dann gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konv.} \iff \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} \text{ konv.}$$

Beweis Setze $s_N := \sum_{n=1}^{N} a_n$, $t_N := \sum_{n=1}^{N} 2^n a_{2^n}$ } Partialsummen der beiden Reihen.

Sei OBdA $a_n \geq 0 \; \forall n$, d.h., $a_n \searrow 0$.

Warum?

Da $(s_N), (t_N) \nearrow$, ist $\left.\begin{matrix}(s_N)\\(t_N)\end{matrix}\right\}$ konvergent $\iff$ beschränkt.

Zz. also: (s_N) beschr. $\iff$ (t_N) beschr.

Wir haben:

- $$s_{2^{N+1}-1} \overset{\text{da } a_n \searrow}{=} \underbrace{a_1}_{=1\cdot a_1} + \underbrace{(a_2+a_3)}_{\leq 2\cdot a_2} + \underbrace{(a_4+\ldots+a_7)}_{\leq 4\cdot a_4} + \ldots + \underbrace{(a_{2^N}+\ldots+a_{2^{N+1}-1})}_{\leq 2^N\cdot a_{2^N}}$$

$$\leq t_N$$

- $$s_{2^N} = \underbrace{a_1}_{\geq \frac{1}{2}\cdot a_1} + \underbrace{a_2}_{=1\cdot a_2} + \underbrace{(a_3+a_4)}_{\geq 2a_4} + \ldots + \underbrace{(a_{2^{N-1}+1} + \ldots + a_{2^N})}_{\geq 2^{N-1}\cdot a_{2^N}}$$
$$\geq \frac{t_N}{2}.$$

D.h., (s_N) beschr. $\Longleftrightarrow$ (t_N) beschr. ∎

Bsp

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} \text{ konv. } (a>0) \Longleftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{2^n \cdot 2^{-na}}_{=(2^{1-a})^n} \text{ konv. } \Longleftrightarrow 2^{1-a} < 1 \Longleftrightarrow \boxed{a > 1}$$

Satz 2.11 (Leibnizkriterium für alternierende Reihen)

Sei $(a_n) \subset \mathbb{R}$ monoton konv. gegen 0. Dann gelten:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konv. (solche Reihen heißen alternierend)

2) Die Summe $s := \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ erfüllt

$$\boxed{\left| s - \sum_{n=1}^{N} (-1)^n a_n \right| \leq |a_{N+1}|},$$ – Fehlerabschätzung

d.h., die Partialsummen s_N approximieren s bis auf einen Fehler, der höchstens $|a_{N+1}|$ ist.

<u>Beweis</u> Sei oBdA $a_n \searrow 0$, d.h.,

$$a_n \geq a_{n+1} \geq 0 \quad \forall n.$$

(Anderer Fall: analog). Wir haben:

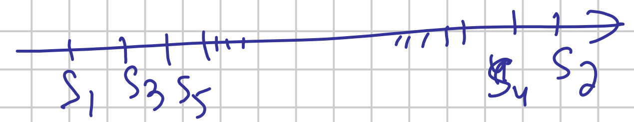
$$s_{N+2} - s_N = (-1)^{N+2} \underbrace{(a_{N+2} - a_{N+1})}_{\leq 0},$$

d.h., $s_1 \leq s_3 \leq s_5 \leq \ldots$ und $s_2 \geq s_4 \geq \ldots$.

Außerdem gilt für <u>gerade</u> N

$$s_N - s_{N-1} = \underbrace{(-1)^N}_{=1} a_N \geq 0,$$

d.h.,



Die Intervalle $([s_{N-1}, s_N])_{N=2,4,6,\ldots}$ bilden eine Intervallschachtelung (da $a_N \to 0$), also $\exists!\, s$ mit $s \in \bigcap_{N=2,4,6,\ldots} [s_{N-1}, s_N]$.

Nach Konstruktion gelten

- $s_1, s_3, \ldots \nearrow s$, $s_2, s_4, \ldots \searrow s$

- $|S - S_N| \le |S_N - S_{N-1}| = |a_N|$. $\blacksquare$

Bsp $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ ist alternierend, also konv., aber nicht absolut konvergent.

Es gilt also: absolute Konv. $\Rightarrow$ konv.
$\not\Leftarrow$

Bsp Erinnere: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Insb. ist $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$ eine alternierende Reihe mit Summe $= e^{-1}$. Man kann mit Hilfe der Fehlerabschätzung zeigen, dass e^{-1} und damit e irrat. ist – Hörsaalübung.

Satz 2.12 (Quotientenkriterium)

Sei $(a_n) \subset \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ mit $a_n \neq 0$ für fast alle n. Wenn

$$q := \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

existiert, so gelten die folg. Implikationen:

$$q < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konv. absolut}$$

$$q > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergiert.}$$

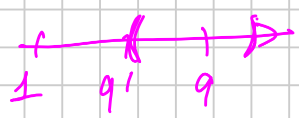
Bem. Achtung: Für $q = 1$ ist keine Aussage möglich:

$\boxed{\text{Bsp}}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ div., $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} \longrightarrow 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konv., $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \longrightarrow 1$.

Beweis (von 2.12) Sei OBdA $a_n \neq 0 \ \forall n$ (konv. hängt nicht von ersten a_n ab).

Fall 1 $q > 1$. Def. $q' := \frac{1+q}{2} > 1$

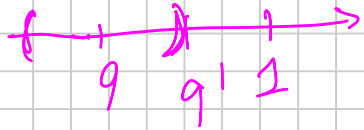


Dann gilt: $\exists N: \forall n \geq N \quad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > q'$, d.h.,

$$|a_n| > q' |a_{n-1}| > \ldots > (q')^{n-N} |a_N| \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$$

Also ist (a_n) keine Nullfolge $\Rightarrow$ Divergenz der Reihe.

<u>Fall 2</u> $q < 1$. Analog def. $q' := \frac{1+q}{2} < 1$.



Wir haben: $\exists N: \forall n \geq N \quad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q'$,

d.h.,

$$|a_n| < q' |a_{n-1}| < \ldots < (q')^{n-N} \cdot |a_N|$$

Da $q' < 1$, konv. $\sum_{n=1}^{\infty} (q')^n$. Majorantenkrit.:

$$\sum_{n=N}^{\infty} |a_n| = |a_N| \sum_{n=1}^{\infty} (q')^n \text{ konv.}$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konv. absolut.

$\boxed{\text{Satz 2.13}}$ (Wurzelkriterium)

Sei $(a_n) \subset \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und def.

$$W := \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

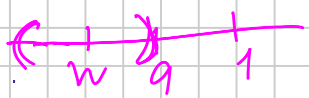
Es gelten die Implikationen

$W < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konv. absolut,

$W > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert.

<u>Bem.</u> Achtung: $W = 1 \Rightarrow$ keine Aussage möglich (nimm wieder $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$).

<u>Beweis</u> <u>Fall 1</u> $W < 1$. Für $q := \frac{1+W}{2} < 1$



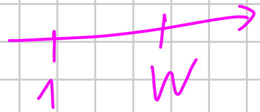
gilt: $\exists N: \forall n \geq N \quad \sqrt[n]{|a_n|} < q$, d.h.,

$$|a_n| < q^n.$$

Majorantenkrit.: $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konv. (da $q<1$).

<u>Fall 2</u> $W > 1$. Dann $\exists$ TF (a_{n_k}) mit

$$\underbrace{\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \geq 1}_{|a_{n_k}| \geq 1}$$



Damit ist (a_n) keine Nullfolge $\Rightarrow$ Divergenz der Reihe. $\blacksquare$

$\boxed{\text{Prop. 2.14}}$ (Vergleich von Quotienten- und Wurzelkrit.)

Wenn für eine Folge (a_n) der Limes $q := \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ existiert, dann exist. auch der Limes

$$w := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$

und es gilt $w = q$.

(D.h., das Wurzelkrit. (WK) ist stärker als das Quotientenkrit. (QK). Wenn Konv./Divergenz mit dem QK festgestellt werden kann, dann auch mit dem WK.)

<u>Beweis</u> Sei zunächst $q > 0$. Dann $\exists\, \varepsilon \in (0, q)$ und ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$q - \varepsilon \le \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le q + \varepsilon \quad \forall n \ge N.$$

Also haben wir

$$|a_{N+k}| \le (q+\varepsilon)^k |a_N| = (q+\varepsilon)^{N+k} \underbrace{\frac{|a_N|}{(q+\varepsilon)^N}}_{=: c_1 \ (= \text{const})} \quad \forall k.$$

Auf der anderen Seite gilt

$$|a_{N+k}| \geq (q-\varepsilon)^k |a_N| = (q-\varepsilon)^{N+k} \cdot \underbrace{\frac{|a_N|}{(q-\varepsilon)^N}}_{=:\, c_0 \ (=\text{const})}$$

D.h., $\forall n \geq N$

$$c_0 (q-\varepsilon)^n \leq |a_n| \leq c_1 (q+\varepsilon)^n,$$

d.h.,

$$(q-\varepsilon) \sqrt[n]{c_0} \leq \sqrt[n]{|a_n|} \leq (q+\varepsilon) \sqrt[n]{c_1}$$

$$\sqrt[n]{c_0} \to 1 \qquad \sqrt[n]{c_1} \to 1$$

Daraus folgt

$$q-\varepsilon \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq q+\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0.$$

$\varepsilon \to 0$ liefert die Behauptung. Fall $q=0$: analog: Hörsaalübung. ∎

$\boxed{\text{Bsp}}$ i) Wenn die Folge (a_n) ∞-viele Nullstellen enthält, dann ist $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ für ∞-viele n nicht def. $\Rightarrow$ QK nicht anwendbar.

Bsp: $a_n = \begin{cases} 2^{-n}, & n \text{ gerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$. Es gilt $0 \le a_n \le 2^{-n}$, d.h.:

$\sqrt[n]{|a_n|} \le \frac{1}{2}$. WK liefert Konv. der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

2) $a_n := \begin{cases} 2^{-n}, & n \text{ gerade} \\ 3^{-n} & \text{sonst.} \end{cases}$

Wir haben: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \frac{2^n}{3^{n+1}} \xrightarrow{n\to\infty} 0, & n \text{ gerade} \\ \frac{3^n}{2^{n+1}} \xrightarrow{n\to\infty} \infty & \text{sonst} \end{cases}$

Also ist das QK nicht anwendbar.

__Aber__: $|a_n| \leq 2^{-n} \quad \forall n \Rightarrow \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{2} < 1$.

WK $\Rightarrow$ Konvergenz der Reihe $\sum a_n$.

Eine wichtige Ungleichung:

$\boxed{\text{Prop. 2.15}}$ (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung für Reihen)

Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$ und $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2$ konv., so konv. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ absolut und

$$\boxed{\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n \cdot b_n| \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2} \cdot \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2}}$$

Die Gleichheit gilt $\Leftrightarrow$ $\exists c \in \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ mit $a_n = c b_n \; \forall n$ oder $b_n = c a_n \; \forall n$.

__Beweis__ __Fall 1__ $a := \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2}$ oder $b := \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2} = 0$. Dann sind alle $a_n = 0$ bzw. $b_n = 0$ und die Behauptung gilt.

__Fall 2__ $a \neq 0$ und $b \neq 0$. Ungl. vom arithm. und geom. Mittel:

$$\left|\frac{a_n}{a}\frac{b_n}{b}\right| = \sqrt{\frac{|a_n|^2}{a^2}\cdot\frac{|b_n|^2}{b^2}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{|a_n|^2}{a^2}+\frac{|b_n|^2}{b^2}\right) \quad \forall n.$$

Also gilt $\forall N \in \mathbb{N}$
$$\frac{1}{ab}\sum_{n=1}^{N}|a_n b_n| \le \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{a^2}\underbrace{\sum_{n=1}^{N}|a_n|^2}_{\le a^2} + \frac{1}{b^2}\underbrace{\sum_{n=1}^{N}|b_n|^2}_{\le b^2}\Big) \le 1,$$

d.h., $\sum_{n=1}^{N}|a_n b_n| \le ab$ $\forall N$. $N\to\infty$ liefert $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n b_n| \le ab$. ∎

Rest: ii

Absolute Konvergenz ist eine sehr starke Eigenschaft:

$\boxed{\text{Satz 2.16}}$ (Umordnungssatz für absolut konv. Reihen)

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ abs. konv. Dann konv. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ unbedingt, d.h.,

$\forall$ bij $\varphi: \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ konv. die umgeordnete Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$ und
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$$

(d.h., man kann a_n in beliebiger Reihenfolge aufsummieren)

Beweis Fall 1: $(a_n) \subset \mathbb{R}$. Sei $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bij und bezeichne

$$S_N := \sum_{n=1}^{N} a_n, \quad S := \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad S_N' := \sum_{n=1}^{N} a_{\varphi(n)}.$$

Es reicht z.z.: $|S_N - S_N'| \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$ (dann impliziert Δ-Ungl. $|S_N' - S| \leq \underbrace{|S_N' - S_N|}_{\to 0} + \underbrace{|S_N - S|}_{\to 0} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$)

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Cauchykrit. für $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ impliziert

$$\exists N_0 \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N} \quad |a_{N_0}| + \dots + |a_{N_0+n}| < \varepsilon. \quad (*)$$

Zu diesem N $\exists K \in \mathbb{N}$ mit

$$\{1, \dots, N_0\} \subset \{\varphi(1), \dots, \varphi(K)\}.$$

Insb. muss $K \geq N_0$ sein (Anzahl der Elemente $\Rightarrow$).

Sei $N \geq K$ beliebig. Dann treten

$$a_1, a_2, \dots, a_{N_0}$$

sowohl in S_N als auch in S_N' vor und kommen in $S_N - S_N'$ nicht mehr vor. Daher ist $S_N - S_N'$ von der Form

$$\delta_1 a_{N_0+1} + \dots + \delta_n a_{N_0+n}$$

für ein $n \in \mathbb{N}$ und $\delta_1, \dots, \delta_n \in \{-1, 0, 1\}$ (Warum?),

d.h.,

$$|S_N - S_N'| \leq |a_{N_0+1}| + \dots + |a_{N_0+n}| \underset{(*)}{<} \varepsilon.$$

Also gilt $|S_N - S_N'| \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$.

<u>Fall 2</u> $(a_n) \subset \mathbb{C}$: folgt aus Fall 1 für $(\operatorname{Re} a_n)$ und $(\operatorname{Im} a_n)$: Ü Hörsaalübung. ■

Die Situation ist ganz anders für nicht abs. konv. Reihen:

$\boxed{\text{Theorem 2.17}}$ (Riemannscher Umordnungssatz)

Sei $(a_n) \subset \mathbb{R}$ s.d. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konv., aber nicht absolut. Dann gilt:

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \exists \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ bij} \quad \text{mit}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = a.$$

Kurze Beweisidee: $\exists\, \infty$-viele a_n mit $a_n > 0$ und ∞-viele mit $a_n < 0$ (sonst wäre konv. = abs. konv.). Außerdem konv. die Reihe von pos. a_n $\Leftrightarrow$ von negativen a_n (da die Summe $= \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$). Da $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ div. und die Differenz der beiden Reihen ist, müssen beide divergieren, d.h., $\sum$ pos. $a_n \nearrow +\infty$, $\sum$ neg. $a_n \searrow -\infty$.

Sei $a \in \mathbb{R}$. Summiere zuerst pos. a_n bis $\sum > a$. Dann addiere die negativen bis $\Sigma < a$, dann wieder pos. usw.

Da $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, konv. die Umordnung gegen a.

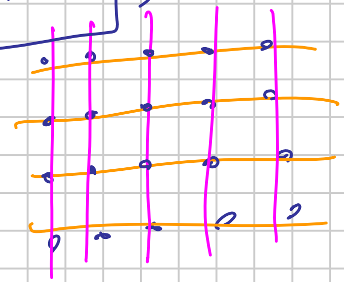
Details: Hörsaalübung.

"■"

Zurück zu konv. Reihen:

Bemerkung Sei $a: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, schreibe $(a_{n,m})_{n,m=1}^{\infty}$. abzählbar

$\boxed{\text{Wenn } \sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}}$ für eine Abzählung $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ $\boxed{\text{abs. konv.}}$, dann konv. jede andere. insb. konvergieren die Reihen



$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,m}$ $\forall m \in \mathbb{N}$ und $\sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ absolut (warum?) und es gilt

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,m}}$$

(Doppelreihensatz).

Noch eine Folgerung aus dem Umordnungssatz für abs. konv. Reihen:

Satz 2.18 (Cauchyprodukt von Reihen)

Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konv. und def.

$$c_n := a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0 .$$

Dann konv. $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut und

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right).$$

Bem. D.h., $(a_0+a_1+\ldots)(b_0+b_1+\ldots) = (a_0 b_0) + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + \ldots$

Beweis: Hörsaalübung

$\boxed{\text{Bsp}}$ (für Cauchyprodukt $\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$)

① Additionsthm. für die e-Fkt:

$\forall x, y \in \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ gilt

$$e^{x+y} \overset{\text{e-Reihe konv. } \forall x}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} \overset{\text{binom. Formel}}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^k y^{n-k}}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{x^k}{k!}}_{=:a_k} \cdot \underbrace{\frac{y^{n-k}}{(n-k)!}}_{=:b_{n-k}} \overset{\text{Cauchyprod.}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}$$

$$= e^x \cdot e^y .$$

(2) Berechnen die <u>Summe der Reihe</u>

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) q^n}$$

abs. Konv. $\Longleftrightarrow |q| < 1$

Div. $\Longleftrightarrow |q| \geq 1$

Sei $q \in \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ mit $|q| < 1$. Dann gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \overset{=: a_n}{q^k} \overset{=: b_{n-k}}{q^{n-k}}}_{(n+1) \text{ Summanden, alle } = q^n}$$

$$\underset{\text{Cauchyprodukt}}{=} \left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\right) = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

3. Potenzreihen

Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $\forall n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : D \to \mathbb{R}$ gegeben. Dann heißt $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ eine <u>Funktionenfolge</u> und $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ eine <u>Funktionenreihe</u>. Dabei ist die Reihe punktweise als $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ für $x \in D$ definiert und, falls diese Reihen alle konvergieren, stellt eine Fkt $: D \to \mathbb{R}$ dar.

Analog: $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$ usw. statt $\mathbb{N}$.

$\boxed{\text{Bsp}}$ (<u>Exponentialreihe</u>)

Wir wissen: $e^x = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Wir haben also

– Exponentialreihe, konv. absolut.

eine Funktionenreihe mit $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$, die absolut konv.

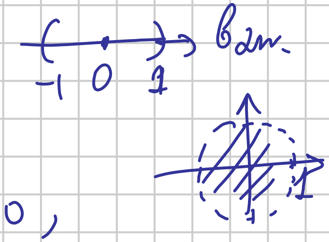
$\boxed{\text{Def 3.1}}$ Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$, $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$. Die Funktionenreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad x \in \mathbb{R} \text{ bzw. } \mathbb{C}$$

heißt eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt x_0 und Koeff. a_n.

$\boxed{\text{Bsp}}$ 1) Geometrische Reihe: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ $(x_0 = 0,\ a_n = 1\ \forall n)$

Die Reihe konv. für x mit $|x| < 1$ und div. sonst



2) Exponentialreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $(x_0 = 0,\ a_n = \frac{1}{n!}\ \forall n \in \mathbb{N}_0$, wobei $0! := 1)$

3) Sinusreihe:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots}$$

$(x_0 = 0,\quad a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ gerade} \\ \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}, & n = 2k+1. \end{cases}$

Die Reihe konv. absolut $\forall x \in \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ nach Majorantenkrit.

$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!} \text{ konv.} \right)$.

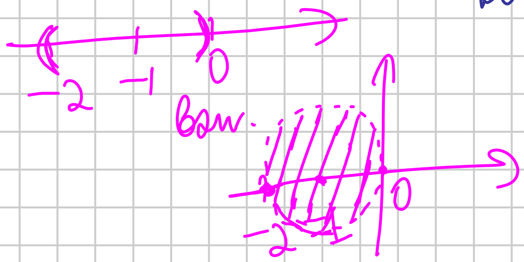
4) Kosinusreihe:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots}$$

– analog.

5) $\sum_{n=0}^{\infty} (x+1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (x-\underbrace{(-1)}_{x_0})^n$: $x_0 = -1$, $a_n = 1 \ \forall n$

– konv. absolut für x mit $|x+1| < 1$ (und div. sonst) – warum?

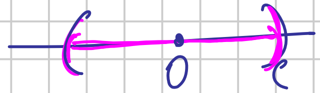


Bem. 0) $\forall$ Potenzreihe konvergiert im Entwicklungspunkt x_0 (mit Summe $=0$).

1) Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ eine Potenzreihe um x_0. Mit $y := x - x_0$ ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ –"– um 0, mit dem um x_0 verschobenen Konvergenzgebiet.

2) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ ist eine Verallgemeinerung von Polynomen.

$\boxed{\text{Lemma 3.2}}$ Konv. eine Potenzreihe $P(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ in einem Punkt $c \neq 0$, so konv. sie absolut $\forall x$ mit $|x| < |c|$.



Beweis Notwendige Bedingung für die Konv. impliziert

$$a_n c^n \longrightarrow 0,$$

insb. ist $(a_n c^n)$ beschränkt:

$$\exists M \geq 0 : |a_n c^n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Sei x mit $|x| < |c|$. Dann gilt $q := \left|\frac{x}{c}\right| < 1$. Wir haben:

$$|a_n x^n| = \left|a_n \underbrace{\frac{x^n}{c^n}}_{q^n} \cdot c^n\right| = \underbrace{|a_n c^n|}_{\leq M} \cdot q^n \leq M q^n.$$

Majorantenkrit.: $\sum a_n x^n$ konv. abs. (da $q < 1$).

Def. 3.3 Für eine Potenzreihe P mit $P(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ def.

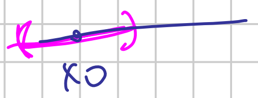
$$\rho(P) := \begin{cases} \infty, & \text{wenn } P(x)\ \forall x \text{ konv.} \\ \sup |x| : P(x) \text{ konv. sonst.} \end{cases}$$

Konvergenzradius von P.

Bem. 1) Aus dem Lemma folgt:

- $P(x)$ konv. abs. $\forall x$ mit $|x| < \rho(P)$
- $P(x)$ div. $\forall x$ mit $|x| > \rho(P)$.

2) Für Reihen mit Entwicklungspunkt x_0 ersetze $\sup |x|$ durch $\sup |x - x_0|$ und $|x| > \rho(P)$ (bzw. $|x| < \rho(P)$) durch $|x - x_0| > \rho(P)$ bzw. $|x - x_0| < \rho(P)$.



Also ist das Konvergenzgebiet immer $= \mathbb{R}$ oder einem Intervall um

x_0 (offen, abgeschlossen oder halboffen) bzw. $= \mathbb{C}$ oder einer Kreisscheibe eventuell mit manchen Punkten auf dem Rand.

$\boxed{\text{Satz 3.4}}$ (Formeln für den Konvergenzradius)

Für den Konvergenzradius einer p'Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ gilt:

$$\boxed{\rho(p) = \frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}} \quad \text{(Cauchy-Hadamard)}$$

und

$$\boxed{\rho(p) = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}}} \quad \text{(Euler)},$$

falls der Limes im Nenner existiert. Dabei def. wir <u>hier</u> $\frac{1}{0} := \infty$ und $\frac{1}{\infty} := 0$.

Beweis 1) Cauchy-Hadamard:

$$\sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Wurzelkrit.: $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \begin{cases} <1, & \text{wenn } |x| < \frac{1}{\overline{\lim}\ldots} \\ >1, & \text{wenn } |x| > \frac{1}{\overline{\lim}\ldots} \end{cases}$

Konvergenz

Divergenz

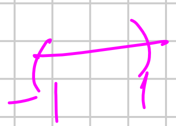
Also gilt $\rho(P) = \frac{1}{\overline{\lim}\ldots}$ nach der Def. des Konvergenzradius.

2) Euler: analog mit Quotientenkrit. ∎

$\boxed{\text{Bsp } 3.5}$ 1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$: $\rho = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{1}} = 1 \Rightarrow$ Konv., wenn $|x| < 1$

Div., –"– >1.

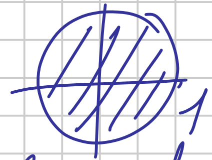
Divergenz für $x = \pm 1$ bzw. $x \in \mathbb{T}$ (da (x^n) keine Nullfolge)

 oder 

Konvergenzgebiet also $= (-1, 1)$ bzw. $U_1(0)$.

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$: $\rho = 1$ (Euler: $\frac{1}{n+1} \cdot n \to 1$)

Div. für $x=1$ (harm. Reihe), Konv. für $x=-1$ (alternierende Reihe)
nicht absolut

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$: $\rho = 1$ (Euler),
abs. Konv. für x mit $|x| = 1$ (Majorantenkrit.),
d.h., Konv.'Gebiet $= [-1, 1]$ bzw. 

Insbesondere ist i.A. <u>keine Aussage über Konvergenz auf dem</u> <u>Rand</u> (d.h., x mit $|x - x_0| = \rho\ (P)$) <u>möglich!</u>

$\boxed{\text{Bsp}}$ $\rho = \infty$ für Exp'Reihe, Sinus- und Kosinusreihe – Warum?

$\boxed{\text{Satz 3.6}}$ (Cauchy-Produkt von Potenzreihen)

Konvergieren $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ im Punkt x absolut, so gilt

$$f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) x^n.$$

<u>Beweis</u> Cauchyprodukt für abs. konv. Reihen:

$$f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x),$$

wobei $c_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \cdot b_{n-k} x^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \cdot x^n.$ ∎