Notiztitel 22.11.2018

$\boxed{\text{Bsp}}$ 1) $1 - \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ nach a), b)

2) $\frac{1}{n^2} = \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} \longrightarrow 0$

3) $\frac{5n^2 - 4n}{2n^2 + 1} = \frac{\cancel{n^2}\left(5 - \frac{4}{n}\right)}{\cancel{n^2}\left(2 + \frac{1}{n^2}\right)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{5}{2}$ nach a), b) und d)

$\frac{n+3}{n^2-n} = \frac{\cancel{n}\left(1 + \frac{3}{n}\right)}{n^{\cancel{2}}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)} = \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{1 + \frac{3}{n}}{1 - \frac{1}{n^2}}}_{\to 1} \longrightarrow 0$

$$\frac{3n^2-1}{n+6} = \frac{n^{\cancel{2}}\left(3-\frac{1}{n^2}\right)}{\cancel{n}\left(1+\frac{6}{n}\right)} = n \cdot \underbrace{\frac{3-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{6}{n}}}_{\to 3,\ \text{insb.} \geq 2} \geq 2 \cdot n, \quad \text{für genügend große } n$$

2 3

– unbeschränkt $\Rightarrow$ divergent

im Allg. gilt: Seien p, q Polynome mit $q(n) \neq 0$ für fast alle n ($\forall n$ ab einem Index N, oder: für alle bis auf endlich viele n).

Dann ist

$$\left(\frac{p(n)}{q(n)}\right) \begin{cases} \text{konv. gegen } \frac{a_d}{b_d}, \text{ wenn } d = \deg p = \deg q \text{ und } p(x) = a_d x^d + \dots,\ q(x) = b_d x^d + \dots \\ \text{konv. gegen } 0, \text{ wenn } \deg p < \deg q \\ \text{diverg. (da unbeschr.), wenn } \deg p > \deg q \end{cases}$$

Ordnung

Ü / Hörsaalüb.

Bem 1) $\begin{cases} a_n \to a \\ b_n - a_n \to 0 \end{cases} \Rightarrow b_n \to a$:

schreibe $b_n = \underbrace{b_n - a_n}_{\to 0} + \underbrace{a_n}_{\to a} \to a$

2) Wenn (a_n) Nullfolge und (b_n) beschränkt ist, ist $(a_n \cdot b_n)$ auch eine Nullfolge

Ü (Grund: $|a_n \underbrace{b_n}_{\leq M}| \leq M |a_n|$)

$\boxed{\text{Satz 1.7}}$ (Sandwichkriterium für Konvergenz / Einschnürungssatz)

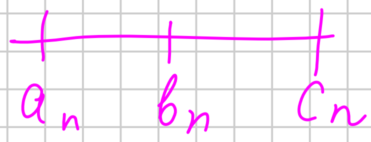
Seien $(a_n), (b_n), (c_n) \subset \mathbb{R}$ mit $a_n \leq b_n \leq c_n \; \forall n$.

Wenn $\lim_{n\to\infty} a_n = a = \lim_{n\to\infty} c_n$, so gilt $a = \lim_{n\to\infty} b_n$.

Beweis Sei $\varepsilon > 0$. Nach Vorauss. $\exists N_1, N_2 \in \mathbb{N}$:

$$\forall n \geq N_1 \quad |a_n - a| < \varepsilon$$

$$\forall n \geq N_2 \quad |c_n - a| < \varepsilon$$



Für $\forall n \geq \max\{N_1, N_2\}$ haben wir

$$|\underbrace{b_n \overbrace{-a}^{-a_n + a_n}}| \leq |\underbrace{b_n - a_n}_{\leq c_n - a_n}| + |a_n - a|$$

Δ - Ungl.

$$\leq |\underbrace{c_n - a}_{< \varepsilon}| + 2|\underbrace{a - a_n}_{< \varepsilon}| < 3\varepsilon$$

Bem. Es reicht: $a_n \leq b_n \leq c_n$ für fast alle n (Warum?)

$\boxed{\text{Folgerung 1.8}}$ (Majorantenkriterium für Folgen)

Seien $(a_n) \subset \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) und $(b_n) \subset \mathbb{R}$ mit

$$|a_n| \leq b_n \text{ für fast alle } n.$$

Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, dann auch $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

__Bem.__ (b_n) heißt Majorante für (a_n)

__Beweis__ $0 \leq |a_n| \leq b_n$ für fast alle n.

0

Einschnürungssatz: $|a_n| \to 0 \Rightarrow a_n \to 0$. ∎

Def. der Konv.

$\boxed{\text{Bsp 1.9}}$ 1) $1 \leq \sqrt{1+\frac{1}{n}} \leq 1 + \frac{1}{n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n}} = 1$

Analog: $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{1+\frac{1}{n}} = 1 \ \forall k}$ 1

2) $\boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1}$

<u>Beweis</u> Setze $a_n := \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0 \quad \forall n.$

Es gilt $\quad n = (1 + a_n)^n \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2} a_n^2,$

binom. Satz

(erinnere: $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$)

d.h., $\quad a_n^2 \leq \frac{(n-1) \cdot 2}{n(n+1)} \leq \frac{2}{n}.$

≤ 1

Insgesamt haben wir:

$$0 \leq a_n \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$$

$\to 0 \qquad \to 0$

Ü: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{n}} = 0 \quad \forall k$

Einschnürungssatz: $a_n \to 0$, d.h., $\sqrt[n]{n} \to 1$. $\blacksquare$

3) $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0 \text{, sobald } |q| < 1}$

Beweis

Fall 1: $q = 0$: $0 \to 0$ ✓

Fall 2 $q \neq 0$. Def. $h := \frac{1}{|q|} - 1 > 0$.

Es gilt: $0 \leq |q^n| = |q|^n = \frac{1}{(h+1)^n} \leq \frac{1}{1+n\cdot h} < \frac{1}{n\cdot h} = \frac{1}{h}\cdot\frac{1}{n}$

Bernoullische Ungl.

$(1+h)^n \geq 1 + n\cdot h$

0

$\Rightarrow q^n \to 0$.

Es gilt sogar: $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} n^b q^n = 0 \quad \forall b \in \mathbb{N} \text{, sobald } |q| < 1}$, d.h., q^n konv. sehr schnell gegen 0 — Hörsaalübung (analog)

Daraus folgt: $\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{q^n} = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}, \text{ sobald } |q| > 1}$

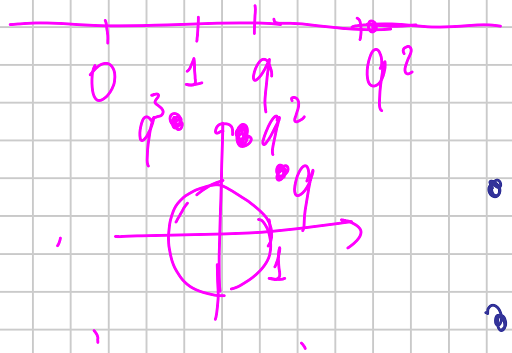
(Def. $\tilde{q} := \frac{1}{q}$, $|\tilde{q}| < 1$. Wir wissen: $\underbrace{n^k \tilde{q}^n}_{= \frac{n^k}{q^n}} \to 0$),

Bem.

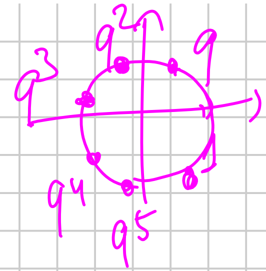
- $|q| > 1 \Rightarrow (q^n)$ unbeschr. $\Rightarrow$ divergent

  Bernoulli: $|q|^n = (1 + \underbrace{(|q|-1)}_{>0})^n \geq 1 + n \cdot \underbrace{(|q|-1)}_{>0}$ – unbeschränkt

  $\geq n \cdot \underbrace{(|q|-1)}_{>0}$



- $q = 1$: $\lim q^n = 1$
- $|q| = 1$, $q \neq 1 \Rightarrow (q^n)$ beschränkt, aber divergent:



$\mathbb{R}$: $q = -1$: $((-1)^n)$ diverg.

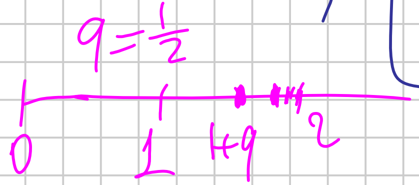
$\mathbb{C}$: $|q^n| = 1$ – beschr.

$$|q^n - q^{n+1}| = \underbrace{|q^n|}_{=1} \cdot |1-q| = |1-q|$$

Ang.: $q^n \to a$. Dann: $|q^n - q^{n+1}| \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \underbrace{|q^n - a|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|a - q^{n+1}|}_{<\varepsilon} < 2 \cdot \varepsilon$ für genügend große n

Für $\varepsilon < \frac{|1-q|}{2}$: ↯

4) $\boxed{1 + q + q^2 + \ldots + q^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{1-q}, \text{ sobald } |q| < 1}$



__Beweis__ $a_n := \boxed{1 + q + \ldots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$ – geom. Summenformel

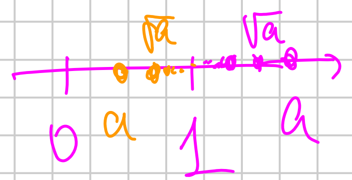
Idee: $(1+q+\dots+q^n)(1-q) = 1+\cancel{q}+\dots+\cancel{q^n}-\cancel{q}-\cancel{q^2}-\dots-\cancel{q^n}-q^{n+1}$

$= 1-q^{n+1}$!

D.h., $a_n = \frac{1}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q} \longrightarrow \frac{1}{1-q}$

$\frac{q^{n+1}}{1-q} \to 0$ nach 3)

5) $$\boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad \forall a>0.}$$



<u>Beweis</u> <u>Fall 1</u> $a \geq 1$.

Def. $x_n := \sqrt[n]{a} - 1 \geq 0$. Wir haben,

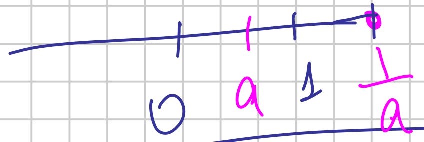
$$a = (x_n+1)^n \geq 1 + n \cdot x_n,$$

Bernoulli

d.h., $0 \leq x_n \leq \frac{a-1}{n} \Rightarrow x_n \to 0$, d.h., $\sqrt[n]{a} \to 1$.

__Fall 2__: $0<a<1$. Def. $q = \frac{1}{a} > 1$.

Fall 1 $\Rightarrow \sqrt[n]{q} \to 1$, d.h., $\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{q}} \to 1$



$\boxed{\text{Def. 1.10}}$ Eine Folge $(a_n) \subset \mathbb{R}$ heißt

- __monoton wachsend__, wenn $a_n \le a_{n+1}$ $\forall n$, d.h., $a_1 \le a_2 \le a_3 \le \ldots$
- __monoton fallend__, wenn $a_n \ge a_{n+1}$ $\forall n$, d.h., $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \ldots$
- __monoton__, wenn monoton wachsend oder
  — " — fallend

Schreibe $a_n \uparrow$ bzw. $a_n \downarrow$ für monoton wachsend / fallend.

- strikt monoton wachsend bzw. fallend, wenn $a_n < a_{n+1}$ (bzw. $a_n > a_{n+1}$) $\forall n \in \mathbb{N}$.
- strikt monoton, wenn strikt monoton wachsend oder — " — fallend.

$\boxed{\text{Bsp}}$ $n \nearrow$, $-n^2 \searrow$, $(-1)^n$ nicht monoton.

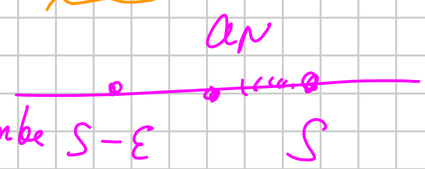
$\boxed{\text{Satz 1.11}}$ (Monotoniekriterium für Konvergenz)

Jede beschränkte monotone Folge (a_n) konvergiert, und zwar gegen

- $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, wenn $a_n \uparrow$
- $\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, wenn $a_n \downarrow$.

Beweis **Fall 1**: $a_n \uparrow$. Sei $S := \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ und $\varepsilon > 0$.

Nach Def. des Sup.: $\exists N \in \mathbb{N}: a_N > S - \varepsilon$, keine obere Schranke



d.h., $S - a_N < \varepsilon$.

Da $a_n \uparrow$, gilt $\forall n \geq N$

$$|S - a_n| = S - a_n \leq S - a_N < \varepsilon,$$

($\geq$ obere Schranke)

also $a_n \to S$.

Fall 2: $a_n \downarrow$: analog oder setze $b_n := -a_n$,

dann gilt $b_n \uparrow$ und nach Fall 1

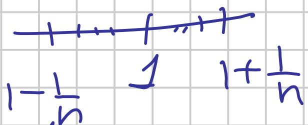
$$a_n = -b_n \to -\sup\{-a_n : n \in \mathbb{N}\} = \inf\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$$

$\blacksquare$

Schreibe $a_n \nearrow a$, wenn $a_n \nearrow$ und $a_n \to a$,

und analog $a_n \searrow a$.

Bsp $1+\frac{1}{n} \searrow 1$, $\quad 1-\frac{1}{n} \nearrow 1$.



Bem. 1) Für monotone Folgen gilt also:

(a_n) konv. $\Leftrightarrow$ (a_n) beschr.

Außerdem gilt $\Leftrightarrow$ (a_n) nach oben beschr., falls $a_n \nearrow$

— " — von unten — " — $a_n \searrow$.

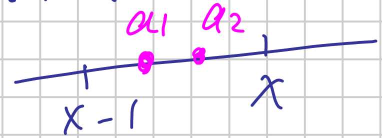
($a_n \nearrow \Rightarrow a_n \geq a_1 \; \forall n$, d.h., autom. von unten beschr.,
$a_n \searrow$ analog)

2) Es reicht für den Satz, wenn (a_n) ab einem Index N_0 monoton ist (mit $\lim = \sup\{a_n : n \geq N_0\}$ bzw. $\inf\{$ — " — $\}$) – warum?

Prop. 1.12 Jede reelle Zahl ist Grenzwert einer Folge rationaler Zahlen. Dabei kann die Folge strikt $\nearrow$

oder strikt $\searrow$ gewählt werden.

Beweis Sei $x \in \mathbb{R}$. Wir konstruieren $a_n \nearrow x$, $(a_n) \subset \mathbb{Q}$.
($\searrow$ - analog.). Erinnere: $\forall$ offene Intervall enthält eine rat. Zahl. Wähle



$a_1 \in \mathbb{Q}$ mit $a_1 \in (x-1, x)$

$a_2 \in \mathbb{Q}$ mit $a_2 \in \underbrace{(a_1, x) \cap (x - \frac{1}{2}, x)}_{\text{auch ein off. Intervall}}$

$\cdots$

$a_n \in \mathbb{Q}$ mit $a_n \in (a_{n-1}, x) \cap (x - \frac{1}{n}, x)$.

$\cdots$

Wir haben $a_n \nearrow x$, da $|a_n - x| \leq \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ (Majorantenkrit.)
(strikt $\nearrow$ - klar). $\blacksquare$

$\boxed{\text{Bsp 1.13}}$ (<u>Dezimaldarstellung</u>)

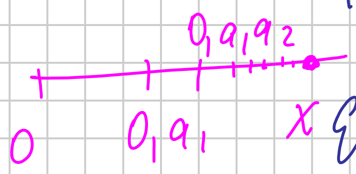
Sei $(a_n) \subset \{0, \ldots, 9\}$. Dann ist die Folge

$$x_n := 0{,}a_1 a_2 \ldots a_n := \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_n}{10^n}$$

monoton $\nearrow$ und beschr. $(0 \le x_n \le 1 \ \forall n)$, also konvergent.

Für den Limes schreibe

$$x := 0{,}a_1 a_2 a_3 \ldots$$



Eigenschaften:

- $|x - x_n| \le \frac{1}{10^n}$ — Hörsaalübung

- $\forall x \in [0,1] \ \exists (a_n) \subset \{0, \ldots, 9\}$ mit $x = 0{,}a_1 a_2 \ldots$ — Dezimaldarstellung von x

  (Sei a_1 die größte Zahl mit $0{,}a_1 \le x$

  a_2 — " — $0{,}a_1 a_2 \le x$

  ...)

  Dann gilt: $|x - 0{,}a_1 a_2 \ldots a_n| \le \frac{1}{10^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$,

  d.h., $x = 0{,}a_1 a_2 a_3 \ldots$

- Die Darstellung ist für Zahlen von der

Form $\frac{a}{10^b}$ nicht eindeutig, z. B.,

$0{,}199\ldots = 0{,}2$: $|0{,}2 - 0{,}\underbrace{199\ldots9}_{n}| \le \frac{1}{10^n} \to 0$.

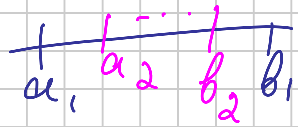
Bem. Noch ein Bsp: Intervallschachtelung:

Sei $([a_n, b_n])_{n=1}^{\infty}$ eine Folge von Intervallen mit

$[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}] \quad \forall n.$

Dann ist $a_n \nearrow$ und beschr. $(a_1 \le a_n \le b_1 \ \forall n)$

$b_n \searrow$ — " — $(a_1 \le b_n \le b_1 \ \forall n)$.



Also $\exists\, a := \lim_{n\to\infty} a_n = \sup_n a_n$, $b := \lim_{n\to\infty} b_n = \inf b_n$.

Wenn $b_n - a_n \to 0$ (also: Intervallschachtelung),

dann gilt $a = b$ und $\{a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$.

$\boxed{\text{Bsp. 1.14}}$ (Exponentialfunktion)

Sei $x \in \mathbb{R}$ und betrachte

$$a_n := \left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

Behauptung: $a_n \nearrow$ für fast alle n und beschr.

Beweis 1) Monotonie

sei $n \geq -x$ (s.d. $1+\frac{x}{n} \geq 0$).

Hilfsmittel: Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel:

$$(*) \quad \boxed{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x_1, \ldots, x_n \geq 0}$$

Außerdem gilt "=" $\iff x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

(Geom. Interpretation + Beweis durch Induktion: Hörsaalübung)

$(*)$ angewandt auf $\underbrace{\left(1+\frac{x}{n}\right), \ldots, \left(1+\frac{x}{n}\right)}_{n \text{ mal}}, 1$ liefert

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \cdot 1} \leq \frac{n\left(1+\frac{x}{n}\right)+1}{n+1} = \frac{n+x+1}{n+1} = 1+\frac{x}{n+1}$$

d.h., $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}$.

2) Beschränktheit

Von unten – klar (endlich viele a_n sind ≤ 0)

Nach oben:

Fall 1 $x \leq 0$. Dann gilt $\left(1+\underbrace{\frac{x}{n}}_{\in(-1,0)}\right)^n \leq 1^n = 1$ für $n \geq -x$

Fall 2 $x > 0$. Sei $n_0 > x$ und $n \geq n_0$.

Ungleichung vom harmonischen und arithm. Mittel:

$$\boxed{\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\ldots+\frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x_1, \ldots, x_n > 0}$$

Außerdem gilt „=" $\Leftrightarrow x_1 = \ldots = x_n$.

<u>Beweis der Ungl.</u>

Setze $y_1 := \frac{1}{x_1}, \ldots, y_n := \frac{1}{x_n}$, ZZ: $\frac{n}{y_1 + \ldots + y_n} \le \frac{1}{\sqrt[n]{y_1 \cdot \ldots \cdot y_n}}$,

aber das ist äquiv. zu $(*)$!

Aussage über „=" folgt aus der entspr. Aussage für $(*)$. ∎ Ungl.

Diese Ungleichung impliziert

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{x}{n-x}\right)^n \cdot 1} \geq \frac{n+1}{\frac{n}{1+\frac{x}{n-x}}+1} = \frac{n+1}{\frac{\cancel{n}(n-x)}{\cancel{n}}+1} = \frac{n+1}{n+1-x}$$

$$= 1 + \frac{x}{n+1-x},$$

d.h., $\left(1+\frac{x}{n-x}\right)^n \searrow$ ab n_0.

Daraus folgt $\left(1+\underbrace{\frac{x}{n}}_{\le \frac{x}{n-x}\text{, da } x \geq 0,\ n-x \geq 0}\right)^n \le \left(1+\frac{x}{n-x}\right)^n \overset{\text{Monotonie ab } n_0}{\le} \left(1+\frac{x}{n_0-x}\right)^{n_0}$

Behauptung ∎

Monotoniekriterium: Es existiert

$$\boxed{e^x := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$$

Die Fkt $e^\cdot : \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto e^x$ heißt Exponentialfunktion,
schreibe auch $\exp(x)$ statt e^x.

Die Zahl $e := e^1 = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ heißt Eulersche Zahl,

$e = 2{,}71828\ldots$ (Notation e: Euler 1731)

Sie ist irrational und transzendent (= nicht algebraisch) – ohne Beweis.
(wie π)

Bem. Insb. gilt $\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = \left(1+\frac{(-x)}{n}\right)^n \nearrow e^{-x}$,

d.h., $\left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n} \searrow \frac{1}{e^{-x}}$, sobald $e^{-x}\neq 0$. Wir werden gleich sehen! $\frac{1}{e^{-x}} = e^x$, d.h.,

$$\boxed{e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n}} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

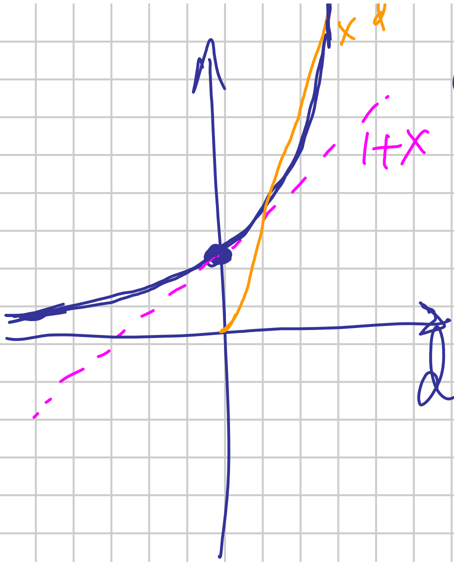
Eigenschaften der Exponentialfkt

a) $\boxed{e^{x+y} = e^x \cdot e^y}$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Funktionalgleichung

insb. gilt $1 = e^x e^{-x}$, d.h., $\boxed{e^x > 0}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ und $\boxed{e^{-x} = \frac{1}{e^x}}$

b) $\boxed{e^x \geq 1 + x}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Insb. gilt $\boxed{\lim_{n\to\infty} e^{-n} = 0}$.



c) Exp ist $\underline{\text{strikt}} \nearrow$, d.h.,

$$x < y \Rightarrow e^x < e^y.$$

Insb. ist $\exp: \mathbb{R} \to (0,\infty)$ inj. ⟵ später: Bij.

d) e^x wächst schneller als $\forall$ Monom für große x:

$$\boxed{e^x > x^d \quad \forall d \in \mathbb{N} \ \forall x \geq 4d^2}$$

(Später: schneller als $\forall$ Polynom)

<u>Beweis</u> a) Funktionalgleichung:

Wir wissen: $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{y}{n}\right)^n \longrightarrow e^x \cdot e^y \quad \forall x, y.$

Auf der anderen Seite gilt für hinreichend große n:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{y}{n}\right)^n = \left(\underbrace{1+\frac{x+y}{n}}+\frac{x\cdot y}{n^2}\right)^n$$

$$= \underbrace{\left(1+\frac{x+y}{n}\right)^n}_{\to\, e^{x+y}} \cdot \underbrace{\left(1+\frac{x\cdot y}{n^2\left(1+\frac{x+y}{n}\right)}\right)^n}_{=:\, b_n}$$

ZZ: $b_n \to 1$.

<u>Fall 1</u> $x\cdot y = 0 \Rightarrow b_n = 1 \to 1$

<u>Fall 2</u> $x\cdot y < 0$. Für hinreichend große n gilt

$$1 \geq b_n = \Bigg(1+\frac{\overset{<0}{xy}}{\underbrace{\underbrace{n^2+n(x+y)}_{>0}}_{-1<\dots<0}}\Bigg)^n \overset{\text{Bernoulli}}{\geq} 1+\cancel{n}\cdot\frac{xy}{n^{\cancel{2}}+\cancel{n}(x+y)} = 1+\frac{xy}{\underbrace{n+x+y}}\xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Sandwichkrit.: $b_n \to 1$,

<u>Fall 3</u>: $x \cdot y > 0$: ähnlich Hörsaalübung

„Insbesondere": $e^x \geq 0$ nach Def. Da $e^x \cdot e^{-x} = e^0 = 1$, ist $e^x \neq 0$, d.h., $e^x > 0$.

b) $e^x \geq 1+x$ ist klar für $x \leq -1$

Für $x > -1$ ist $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \nearrow$ ab $n = 1$, d.h.,

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geq \left(1+\frac{x}{1}\right)^1 = 1+x. \quad \forall n$$

$$\Rightarrow e^x = \lim \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geq 1+x.$$

Zusatz mit „=" ü („=" in der Ungl. vom arithm. und geom. Mittel)

„Insbesondere“ $0 \le e^{-n} \overset{(a)}{=} \frac{1}{e^n} \overset{(b),\text{ Teil 1}}{\le} \frac{1}{1+n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Sandwichkrit.

c) Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$. Nach (a) haben wir: $e^y = \underbrace{e^x}_{>0} \cdot \underbrace{e^{y-x}}_{\ge 1 \text{ nach (b)}} > e^x$.

d) Sei $d \in \mathbb{N}$ und $x \ge 4d^2$. Nach Monotonie gilt:

$$e^x \ge \left(1 + \frac{x}{2d}\right)^{2d} \underset{\sqrt{x} \ge 2d}{\ge} \left(1 + \sqrt{x}\right)^{2d} \underset{\text{binom. Lehrsatz}}{>} (\sqrt{x})^{2d} = x^d.$$

■

Eine alternative Darstellung von e^x

$$\boxed{e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right)} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Beweis Wir betrachten $x \geq 0$ ($x<0$ - ähnlich - Hörsaalübung)

$(\leq)$ $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \overset{\text{binom. Lehrsatz}}{=} 1 + \underbrace{\cancel{n}}_{\binom{n}{1}} \cdot \frac{x}{\cancel{n}} + \underbrace{\frac{\cancel{n}(n-1)}{2}}_{\binom{n}{2}} \cdot \frac{x^2}{n^{\cancel{2}}} + \dots + \frac{x^n}{n^n}$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} \cdot \underbrace{\frac{n-1}{n}}_{\leq 1} + \dots + \frac{x^n}{n!} \cdot \underbrace{\frac{n!}{n^n}}_{= \frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n}{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n} \leq 1}$$

$$\leq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} \quad \forall n$$

$\Rightarrow \underbrace{\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n}_{e^x} \leq \lim_{n\to\infty} \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right)$, wenn existiert.

$\exists$ des Limes: Monotonie + $\underbrace{\text{Beschränktheit}}_{\text{kommt gleich.}}$

"≥": Sei $k \in \mathbb{N}$ fest. Wie oben haben wir für $n \geq k$:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} \cdot \underbrace{\frac{n-1}{n}}_{\to 1} + \ldots + \frac{x^k}{k!} \underbrace{\frac{(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{n^{k-1}}}_{\to 1}$$

wir brechen bei k ab.

als Produkt von Folgen

Also gilt: $e^x = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geq \underbrace{1 + x + \ldots + \frac{x^k}{k!}}_{\text{insb. beschränkt, monoton} \Rightarrow \text{konv.}} \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$k \to \infty$: $\quad e^x \geq \lim\limits_{k\to\infty} \left(1 + x + \ldots + \frac{x^k}{k!}\right)$ ■

Noch ein wichtiger Limes:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1} \quad \text{– Stirling-Formel}$$

ohne Beweis

d.h., $\boxed{n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}$,

wobei $(a_n) \sim (b_n)$, wenn $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.

asympt. äquivalent

Bem. Wir haben e^x für $x \in \mathbb{R}$ def. Für $x \in \mathbb{C}$: kommt später.

$\boxed{\text{Def. 1.15}}$ (**Teilfolge**) Sei $(n_k) \subset \mathbb{N}$ strikt $\nearrow$ $(n_1 < n_2 < \ldots)$ und (x_n) eine Folge. Die Folge $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty} = (x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots)$ heißt eine **Teilfolge** (TF) von $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

Bem. $\cancel{x_1}, x_2, x_3, \cancel{x_4}, \ldots, x_{17}, \ldots$

$\boxed{\text{Bsp}}$ $(1, 1, 1, \ldots)$ ist eine TF von $(1, 0, 1, 0, \ldots)$

(entspricht $(x_{2n+1})_{n=1}^{\infty}$, $\forall$ $\underbrace{\text{0-1-Folge}}_{x_{n_k}\in\{0,1\}\ \forall k}$ ist eine TF von

Bem.

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x \quad \forall$ TF (x_{n_k}) von (x_n)

- TF von konv. Folgen konv. gegen denselben Limes (Warum ?)

2) (x_{n_k}) konv. $\not\Rightarrow$ (x_n) konv. i.A. (siehe Bsp oben)

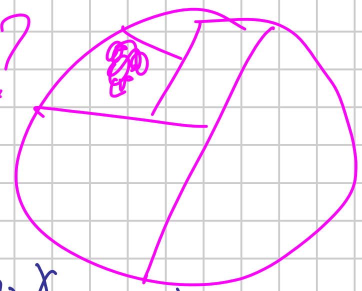
3) $x_n \nearrow \Rightarrow x_{n_k} \nearrow$ (dasselbe für $\searrow$)

4) TF einer TF ist wieder eine TF Ü

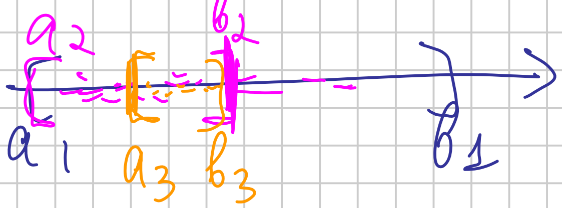
$\boxed{\text{Satz 1.16}}$ (Bolzano-Weierstraß)

Jede beschr. Folge $(x_n) \subset \mathbb{R}$ besitzt eine konv. TF.

Beweis Wie fängt man einen Löwen in einer Wüste?



Idee: Intervallschachtelung



Da (x_n) beschr., $\exists\, [a_1, b_1] \supset \{x_1, x_2, \dots\}$

Def. induktiv:

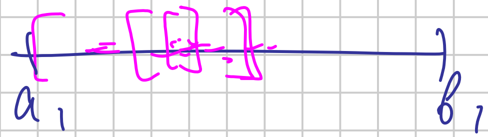
$$[a_{n+1}, b_{n+1}] := \begin{cases} \left[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right], & \text{wenn dort } \infty\text{-viele Folgenglieder liegen} \\ \left[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n\right], & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $([a_n, b_n])_{n=1}^{\infty}$ eine Intervallschachtelung:

Länge $[a_n, b_n] = b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} = \dots = \frac{b_1 - a_1}{2^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Sei x mit $\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$

Wähle (x_{n_k}) induktiv wie folgt:



$x_{n_1} := x_1 \in [a_1, b_1]$

$x_{n_2} \in [a_2, b_2]$ mit $n_2 > n_1$ (möglich, da ∞-viele Folgenglieder in $[a_2, b_2]$)

$x_{n_3} \in [a_3, b_3]$ -"- $n_3 > n_2$

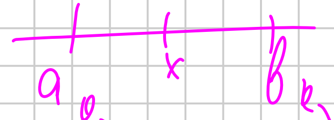
$\vdots$

Wir haben: (x_{n_k}) TF mit

$$a_k \le x_{n_k} \le b_k,$$

$a_k \xrightarrow{k \to \infty} x$, $b_k \xrightarrow{k \to \infty} x$

($|b_k - x| = b_k - x \le b_k - a_k \to 0$



analog für a_k)

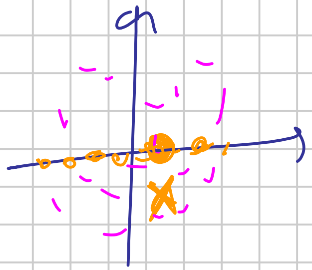
d.h., $x_{n_k} \to x$.

Bem. 1) Es gilt viel mehr:

$\forall$ Folge aus $\mathbb{R}$ besitzt eine monotone TF.

– Hörsaalübung

2) Satz von Bolzano-Weierstraß gilt auch für $\mathbb{C}$!



Beweis: Sei $(z_n) \subset \mathbb{C}$ beschr. Da $(\operatorname{Re} z_n) \subset \mathbb{R}$ beschr., $\exists$ TF (z_{n_k}) mit $\operatorname{Re} z_{n_k} \to x$ für ein $x \in \mathbb{R}$

Da $(\operatorname{Im} z_{n_k}) \subset \mathbb{R}$ beschr., $\exists$ TF $(z_{n_k'})$ von (z_{n_k}) (und damit von (z_n)) mit $\operatorname{Im} z_{n_k}' \to y$ für ein y.

Wir haben: $z_{n_k}' = \underbrace{\operatorname{Re} z_{n_k}'}_{\to x} + i \cdot \underbrace{\operatorname{Im} z_{n_k}'}_{\to y} \longrightarrow x + i \cdot y$ $\blacksquare$

Analog: Bolzano-Weierstraß für $\mathbb{R}^d$ bzw. $\mathbb{C}^d$.

Def. 1.17 Der Grenzwert einer konv. TF von (x_n) heißt **Häufungspunkt (HP)** von (x_n)

Bsp

1) $(0,1,0,1,\dots)$: HP 0 und 1. (warum?)
2) $(1,2,3,\dots)$ keine HP,
3) $(0,1,0,1,2,0,1,2,3,\dots)$ unbeschr., hat aber ∞-viele HP: $0,1,2,3,\dots$

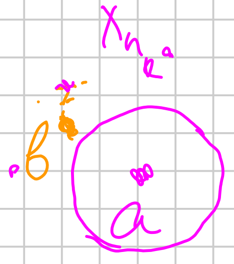
Bem.: Häufungspunkte hängen nicht von ersten endlich vielen Folgengliedern ab.

Prop. 1.8 Sei (x_n) eine Folge in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

(a) Wenn (x_n) beschr. ist, dann gilt:

$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \iff \{HP \text{ von } (x_n)\} = \{a\}$, d.h., a ist der einzige HP.

(b) $\left.\begin{array}{l} a_k \to a \\ \forall a_k \text{ ist HP von } (x_n) \end{array}\right\} \Rightarrow a$ HP von (x_n).



Beweis

$\Rightarrow$ ✓ (Bem. nach Def. 1.15)

$\Leftarrow$ Sei $\{a\} = \{HP \text{ von } (x_n)\}$ und $x_n \not\to a$.

Dann $\exists \delta > 0: \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \geq N$ mit $|x_n - a| \geq \delta$.

D.h., $\exists (x_{n_k})$ TF von (x_n) mit $|x_{n_k} - a| \geq \delta\ \forall k$.

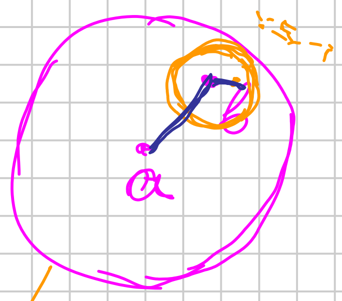
(Nimm n_1 s.d. $|x_{n_1} - a| \geq \delta$, n_2 s.d. $n_2 > n_1$, $|x_{n_2} - a| \geq \delta$ usw...)

B.-W. (1.16): $\exists$ TF (x'_{n_k}) von (x_{n_k}) (und damit von (x_n)!) , die gegen ein b konv.

z.z.: $b \neq a$ (dann: Widerspruch). Wir zeigen: $|b-a| \geq \delta$.

Ang.: $|b-a| = \delta - \varepsilon$ für ein $\varepsilon > 0$

Da $x'_{n_k} \to b$, $\exists k_0$ mit $|x'_{n_{k_0}} - b| < \varepsilon$

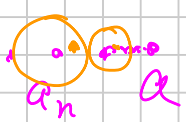


Δ-Ungl.: $|x'_{n_{k_0}} - a| \leq \underbrace{|x'_{n_{k_0}} - b|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|b-a|}_{=\delta-\varepsilon}$

$< \cancel{\varepsilon} + \delta - \cancel{\varepsilon} = \delta$ $\lightning$ $(|x'_{n_{k_0}} - a| \geq \delta)$

Damit gilt $|b-a| \geq \delta$ $\lightning$ (2 Häufungspunkte)

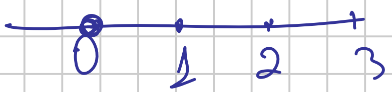
(b) Ü



$\boxed{\text{Bsp}}$ (a) ist i. A. falsch für unbeschr. Folgen:

$(x_n) = 0, 1, 0, 2, 0, 3, \ldots$ — $\{HP\} = \{0\}$, aber Divergenz.

warum?

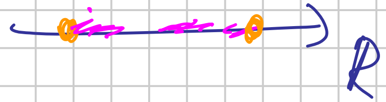


$\boxed{\text{Def. 1.19}}$ Sei $(x_n) \subset \mathbb{R}$ beschr. Nach B.-W. ist die Menge der HP von (x_n) $\neq \emptyset$ und beschr. Def.

Limes superior von (x_n) – $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n := \max\{\text{HP von } (x_n)\}$ = größter HP von (x_n)

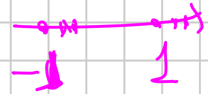
Limes inferior von (x_n) – $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n := \min$ –"– = kleinster –"–

($\exists$ nach Prop. 1.18, (b)) – $\sup\{HP\}$ ist ein HP, $\inf\{HP\}$ –"–



Man schreibt auch $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$, $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$.

$\boxed{\text{Bsp}}$ 1) $x_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$



$1 = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$

$-1 = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$.

2) Die Menge $\mathbb{Q} \cap (0,1)$ ist abz. Sei (x_n) eine Abzählung (egal, welche). $\{HP \text{ von } (x_n)\} = [0,1]$ und damit gilt

$\overline{\lim}\, x_n = 1$, $\underline{\lim}\, x_n = 0$

Ü / Hörsaalübung

Rechenregeln 1.20

1) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(a_n+b_n) \leq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n + \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, b_n$

2) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}(a_n+b_n) \geq \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n + \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, b_n$

Ü

Achtung: $\neq$ i.A.!

$\boxed{\text{Bsp}}$ $a_n = 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$

$b_n = 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$

$\lim(a_n+b_n) = 1$

$\overline{\lim}\, a_n + \overline{\lim}\, b_n = 2$

$\underline{\lim}\, a_n + \underline{\lim}\, b_n = 0$

$\boxed{\text{Def. 1.21}}$ Eine Folge $(x_n) \subset \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ heißt **Cauchyfolge** (CF),

wenn $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N \quad |x_n - x_m| < \varepsilon$,

d.h., ab dem Index N sind alle Folgenglieder $\underbrace{\varepsilon\text{-nah}}_{\text{Abstand} < \varepsilon}$ zueinander.

Schreibe: $x_n - x_m \xrightarrow[n,m \to \infty]{} 0$

Bem. Man kann auch $|x_n - x_m| < 2\varepsilon$ oder ε^2 schreiben (äquiv.!) – Warum?

$\boxed{\text{Beobachtung 1.22}}$ $\forall$ konv. Folge ist Cauchy

Beweis Ang., $x_n \to a$. Dann gilt:

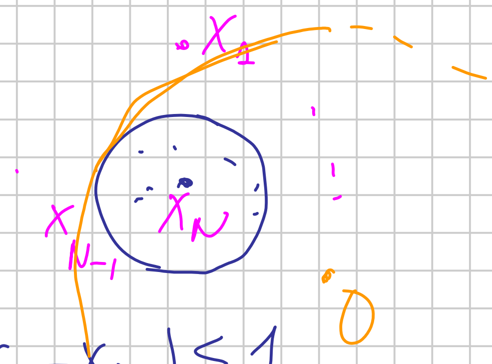
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N : \forall n \geq N \quad |x_n - a| < \varepsilon$

$\forall m \geq N \quad |x_m - a| < \varepsilon$

$|x_n - x_m| \leq |x_n - a| + |a - x_m| < 2\varepsilon$ ∎

$\boxed{\text{Satz 1.23}}$ (Cauchykriterium für konv.)

$\forall$ Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ konv.



Beweis: Sei (x_n) eine CF.

Schritt 1: Wir zeigen: (x_n) beschr.

Für $\varepsilon = 1$ $\exists N: \forall n, m \geq N \quad |x_n - x_m| < 1$

Insb. liegen x_n ab $n = N$ in der 1-Umg. von x_N. (nimm $m = N$)

Damit ist (x_n) durch

$$\max\{|x_1|, \ldots, |x_{N-1}|, |x_N| + 1\}.$$

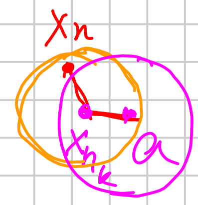
Schritt 2: Nach B.-W. $\exists (x_{n_k})$-konv. TF: $x_{n_k} \to a$.

für ein a. ZZ: $x_n \to a$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da (x_n) CF,

$\exists N: \quad \forall n,m \geq N \quad |x_n - x_m| < \varepsilon$.

Da $x_{n_k} \to a$, $\exists\, \underbrace{k \geq N}_{\text{insb. } n_k \geq N} : |x_{n_k} - a| < \varepsilon$.



Δ-Ungl. impliziert: $\forall n \geq N$

$$|x_n - a| \leq \underbrace{|x_n - x_{n_k}|}_{< \varepsilon \text{ (da } n, n_k \geq N)} + \overbrace{|x_{n_k} - a|}^{< \varepsilon} < 2\varepsilon . \quad \blacksquare$$

Bem. hilft, wenn man den Limes nicht kennt.

$\boxed{\text{Bem.}}$ Man kann zeigen, dass die folgenden Aussagen äquiv. sind:

(i) Sup'Axiom

(ii) Intervallschachtelungsprinzip

(iii) Satz von Bolzano-Weierstraß

(iv) Cauchykriterium

Man sagt für $\forall$ dieser Aussagen: $\mathbb{R}$ ist vollständig, vor allem für (iv).
Für $\mathbb{Q}$ gilt keine der Aussagen! Ü

$\boxed{\text{Bem.}}$ (Eine Konstruktion von $\mathbb{R}$)

Motivation: Man kann $\forall$ reelle Zahl als Limes einer CF aus $\mathbb{Q}$ darstellen (Warum?). Die CF ist aber nicht eindeutig.

Def. $\mathbb{R} := \{(x_n) \subset \mathbb{Q} : (x_n) \text{ CF}\} / \sim$,

wobei $(x_n) \overset{\text{Def.}}{\sim} (y_n)$, wenn $|x_n - y_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

insb. gilt: $[(9,9,9,\dots)] \in \mathbb{R}$, also können wir

$q \in \mathbb{Q}$ mit $[(q,q,\dots)]$ identifizieren und damit $\mathbb{Q}$ „$\subset$" $\mathbb{R}$

Äquivalenzklasse

Def. $+, \cdot$ und $\leq$ auf $\mathbb{R}$ wie folgt:

$$[(x_n)] + [(y_n)] := [(x_n + y_n)]$$
$$[(x_n)] \cdot [(y_n)] := [(x_n \cdot y_n)]$$

$[(x_n)] \leq [(y_n)]$, wenn $\big((x_n) \sim (y_n)$ oder: $x_n < y_n$ für f.a. $n\big)$

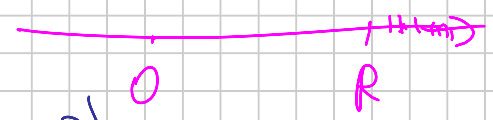
ZZ: $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ ist ein geordneter Körper mit dem Sup'Axiom → Hörsaalübung

Ein anderer Zugang: Dedekindsche Schnitte:

$x \sim$ nach oben beschr. Menge von rat. Zahlen mit bestimmten Eigenschaften → Hörsaalübung

$\boxed{\text{Def. 1.24}}$ Eine Folge $(x_n) \subset \mathbb{R}$ heißt **bestimmt divergent gegen $+\infty$ (bzw. $-\infty$)**, wenn

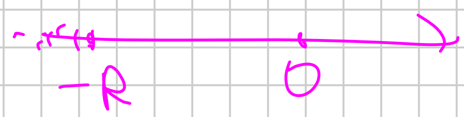
$$\forall R > 0 \ \exists N : \forall n \geq N \ x_n > R$$



(bzw. $x_n < -R$)

Notation: $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ oder $+\infty$

(bzw. $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$)



Man sagt: x_n **divergiert gegen $(+)\infty$ bzw. $-\infty$**

(oder: konv.)

Man sagt, $+\infty$ (bzw. $-\infty$) ist der **uneigentliche Grenzwert** von (x_n).

Achtung: $\pm\infty$ def. wir nicht!

$\boxed{\text{Bsp}}$ $n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ (Archimedisches Axiom)

$-n \to -\infty$, $((-1)^n n)$ nicht best. div.