Notiztitel 22.11.2018

II Konvergenz und Stetigkeit

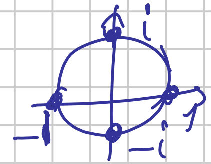
1. Folgen

Def. 1.1 Sei M eine Menge. Eine Folge in M ist eine Abbildung $f: \mathbb{N} \to M$. Man schreibt $a_n := f(n)$ für $n \in \mathbb{N}$ und $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ statt f (auch: $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset M$).

Bsp 1) $f := id : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ entspricht $(n)_{n=1}^{\infty}$, also $1, 2, 3, 4, \ldots$

Identität

2) $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$, d.h., $-1, 1, -1, 1, \ldots$ entspricht $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ mit $f(n) = (-1)^n$. Analog: $(i^n) \subset \mathbb{C}$: $i, -1, -i, 1, \ldots$



Def 1.2 Sei $(a_n) \subset \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$. Dann heißt (a_n) **konvergent gegen a**, wenn

$$(*) \quad \boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \ \underbrace{|a_n - a|}_{} < \varepsilon.}$$

Abstand von a_n zu a $< \varepsilon$.

Äquivalent:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \quad a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon.$$

Dabei heißt a der **Limes** von (a_n), schreibe:

$$a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} a \quad \text{oder} \quad \lim_{n \to \infty} a_n = a.$$

Man sagt: a_n konvergiert gegen a.

Wenn $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$, dann heißt (a_n) eine **Nullfolge**.

Eine Folge (a_n) heißt **konvergent**, wenn es ein a mit $\lim_{n \to \infty} a_n = a$

gibt, sonst heißt (a_n) **divergent**.

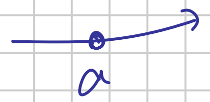
Bem. Def. für $a \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$

$$U_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R} : |x-a| < \varepsilon\} = (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \text{ – } \varepsilon\text{-Umgebung von } a.$$

Dann bedeutet $(*)$, dass $\forall\, \varepsilon$-Umgebung von a es nur endlich viele Folgenglieder a_n gibt (egal, wie klein!), die außerhalb der Umgebung liegen (warum?).

$\boxed{\text{Bsp}}$ 1) konstante Folgen konvergieren:

sei $a_n = a \ \forall n$. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.



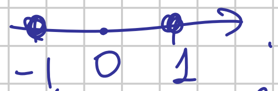
2) $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0}$

sei $\varepsilon > 0$. Finde N: $\forall n \geq N$ $\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$.

Für jedes $N > \frac{1}{\varepsilon}$ gilt das!

^{A} nach Archimedischem Prinzip $\exists$ so ein N.

3) $((-1)^n)$ divergiert:



Ang.: $\exists a \in \mathbb{R}$ mit $a = \lim_{n\to\infty} (-1)^n$, d.h.,

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N: \;\; \forall n \geq N \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Dann gilt (Δ-Ungl.): $\forall n \geq N$

$$|a_n - a_{n+1}| \leq \underbrace{|a_n - a|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|a - a_{n+1}|}_{<\varepsilon} < 2\varepsilon$$

Aber es gilt $|a_n - a_{n+1}| = 2 \;\; \forall n$ $\lightning$ (nimm $\varepsilon < 1$).

Der Trick war: Wenn alle $a_N, a_{N+1}, \ldots$ kleinen Abstand zu a haben, haben sie auch kleinen Abstand zueinander.

<u>Bem.</u> 1) In der Definition des Limes kann man $n \geq N$ durch $n > N$ ersetzen (dabei ersetzt man N durch $N+1$).

Außerdem kann man $|a_n - a| < \varepsilon$ durch

$$|a_n - a| < 2\varepsilon \quad \text{oder} \quad |a_n - a| < C \cdot \varepsilon$$

für eine beliebige fest gewählte Zahl (=: Konstante) $C > 0$ ersetzen. Grund: ersetze $N = N(\varepsilon)$ durch $N(2\varepsilon)$ bzw. $N(C\varepsilon)$,

~~Ü~~ Hörsaalübung.

(Analog: $|a_n - a| < \varepsilon^2$).

2) Die ersten 100, 100^{100} bzw. endlich viele Folgenglieder spielen für die Konvergenz / Limes keine Rolle! Nur das Verhalten von a_n für große n ist wichtig. Insb. gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$$

$\sim a_2, a_3, a_4, \dots$

($N \rightsquigarrow N-1$ bzw. das gleiche N)

Der Limes ist „shift-invariant" (oder: translationsinvariant)

3) Für $(a_n) \subset \mathbb{C}$ und $a \in \mathbb{C}$ def. man $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

wieder durch (*). Dabei sind ε-Umgebungen

$$U_\varepsilon(a) := \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < \varepsilon\}$$

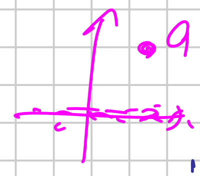
offene Kugeln statt offener Intervalle.

Dabei gilt: $\boxed{a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \iff \begin{array}{l} \operatorname{Re} a_n \to \operatorname{Re} a \\ \operatorname{Im} a_n \to \operatorname{Im} a \end{array}}$ Hörsaalübung

Idee: für $\Rightarrow$ benutze $\begin{cases} |\operatorname{Re} z| \le |z| \\ |\operatorname{Im} z| \le |z| \end{cases}$ und für $\Leftarrow$ $|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}$

($|z|$ klein $\iff$ $|\operatorname{Re} z|$ und $|\operatorname{Im} z|$ klein).

Insb. gilt: $(a_n) \subset \mathbb{R}$, $\lim a_n = a \Rightarrow a \in \mathbb{R}$



(Reelle Folgen können nur gegen reelle Zahlen konvergieren)

4) Es gilt: $\lim a_n = a \iff \lim (a_n - a) = 0$, d.h., $(a_n - a)$ Nullfolge

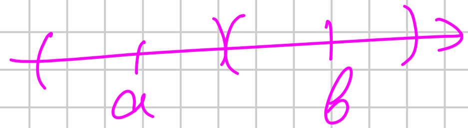
$\iff \lim |a_n - a| = 0$. (Warum?)

Proposition 1.3 (Eindeutigkeit des Limes)

Wenn (a_n) konv., dann ist der Limes eindeutig.

Beweis Ang., $a_n \to a$, $a_n \to b$ mit $a \neq b$.

Betrachte $\varepsilon := \frac{|a-b|}{2}$.



Nach Annahme $\exists N_1 : \forall n \geq N_1 \; |a_n - a| < \varepsilon$

$\exists N_2 : \forall n \geq N_2 \; |a_n - b| < \varepsilon$.

Dann gilt $\forall n \geq \max\{N_1, N_2\}$

$$|a-b| \underset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \underbrace{|a-a_n|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|a_n - b|}_{<\varepsilon} < 2\varepsilon = |a-b| \quad ↯ \quad \blacksquare$$

Bem. Der Limes hängt nicht von der Abzählung der Folge ab:

$\forall j : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bij gilt $a = \lim_{n\to\infty} a_n \iff a = \lim_{n\to\infty} a_{j(n)}$

(z. B. konv. $a_8, a_2, a_{17}, a_5, \ldots$ gegen dieselbe Zahl wie $a_1, a_2, a_3, \ldots$)

Grund: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ höchstens endlich viele Folgenglieder außerhalb $U_\varepsilon(a)$.

$\boxed{\text{Def. 1.4}}$ Eine Folge $(a_n) \subset \mathbb{R}$ (bzw. $(a_n) \subset \mathbb{C}$) heißt **beschränkt**, wenn

$$\exists R > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \leq R$$

(d. h., $\exists \underbrace{U_R(0)}_{\text{Intervall}}$, wo alle Folgenglieder liegen)

Intervall $[-R, R]$ oder Kugel um die Null.

$\boxed{\text{Bsp}}$ 1) $((-1)^n)$, $(\frac{1}{n})$, (i^n) sind beschr. (mit $R := 1$).

Im Allg. ist jede periodische Folge beschränkt. Warum? Hier heißt (a_n) **periodisch**, wenn $\exists d : a_n = a_{n+d}$ $\forall n$:

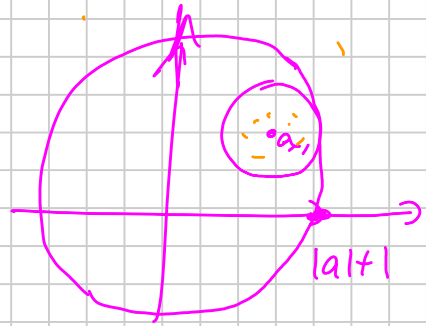
$$a_1, a_2, \ldots, a_d, a_1, a_2, \ldots, a_d, \ldots$$

2) (n), (n^2), (2^n) nicht beschr. ($n^2 \geq n$, $2^n \geq n$).

$((-1)^n n)$ nicht beschr.

Satz 1.5 (Notwendige Bedingung für die Konvergenz)

Jede konv. Folge ist beschränkt.

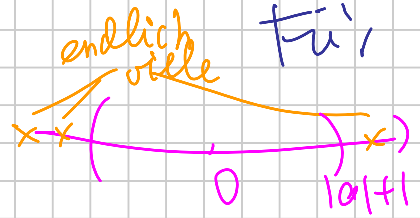


Beweis Ang.: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Dann gilt für $\varepsilon := 1$

$$\exists N: \ \forall n \geq N \quad |a_n - a| < 1.$$

Für solche n gilt dann (Δ-Ungl.):

$$|a_n| \leq |a_n - a| + |a| < |a| + 1.$$



Für $R := \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{N-1}|, |a|+1\}$ gilt $|a_n| \leq R \ \forall n$.

Bem. Es gilt also: $\boxed{(a_n) \text{ unbeschr.} \Rightarrow \text{divergent.}}$

Bsp $(n), (n^2), ((-1)^n n^2)$ sind unbeschr. $\Rightarrow$ div.

__Bem.__ Aber beschr. $\not\Rightarrow$ konv. im Allg.! $\quad$ ($((-1)^n$ beschr., aber divergent)

$\boxed{\text{Satz 1.6}}$ (Eigenschaften des Limes)

Seien $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) konv. mit
$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

Dann gelten:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

$\Big\}$ Linearität

c) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

d) ist $b \neq 0$, so gilt: $\exists N : \forall n \geq N \; b_n \neq 0$.
Die Folge $\left(\dfrac{a_{N+n}}{b_{N+n}}\right)_{n=1}^{\infty}$ konv. gegen $\dfrac{a}{b}$.

Beweis a), b) Ü

c) Da (a_n) und (b_n) beschränkt sind (Satz 1.5),

$\exists R > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \leq R$ und $|b_n| \leq R$.

Sei $\varepsilon > 0$. Nach Voraus. $\exists N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{R + |b|} \quad \forall n \geq N_1$$

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{R + |b|} \quad \forall n \geq N_2,$$

Insb. gilt $\forall n \geq \max\{N_1, N_2\}$

$$|a_n b_n - ab| \underset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} |a_n b_n - a_n b| + |a_n b - ab|$$

$$\leq \underbrace{|a_n|}_{\leq R} \underbrace{|b_n - b|}_{< \frac{\varepsilon}{R+|b|}} + \underbrace{|a_n - a|}_{< \frac{\varepsilon}{R+|b|}} \cdot |b|$$

d) ähnlich; Hörsaalübung $< \frac{\varepsilon}{R+|b|}(R+|b|) = \varepsilon$