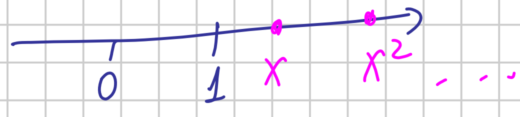
Notiztitel 06.11.2018

Erinnerung:

Folgerung 4.2:

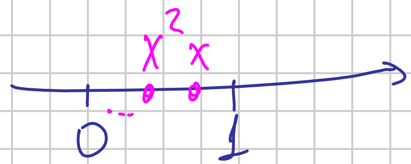
(a) ist $x > 1$, so gilt

$$\forall R \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} : \quad x^n > R$$



(b) ist $x \in (0,1)$, so gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} : \quad x^n < \varepsilon.$$



<u>Beweis</u> (a) Schreibe $x = 1 + r$ für $r > 0$ und sei $R \in \mathbb{R}$.

Nach Bernoulli: $x^n = (1+r)^n > n \cdot r$ für $n \geq 2$.

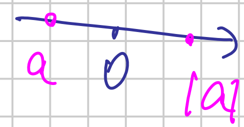
Nach (O3): $\exists n$ mit $\underbrace{n \cdot r > R}_{n > \frac{R}{r}}$ und damit:

$$x^n > n \cdot r > R.$$

(b) folgt aus (a) für $y := \frac{1}{x}$ und $R := \frac{1}{\varepsilon}$ (Warum?). $\blacksquare$

Def. 4.3 (Absolutbetrag)

Für $a \in \mathbb{R}$ def. $|a| := \begin{cases} a, & \text{wenn } a \geq 0 \\ -a, & \text{wenn } a < 0 \end{cases}$



Rechenregeln:

1) $|a| = |-a| \geq 0$ und $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
2) $a \leq |a|$, $-a \leq |a|$, $|a| = \max\{a, -a\}$ Maximum
3) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
4) $\boxed{|a+b| \leq |a| + |b|}$ — Dreiecksungleichung

5) $\boxed{|a-b| \geq \big||a|-|b|\big|}$ – umgekehrte Δ-Ungl.

6) $\max\{a,b\} = \dfrac{a+b+|a-b|}{2}$

$\min\{a,b\} = \dfrac{a+b-|a-b|}{2}$

Beweis

1) ≥ 0 klar

$|a| = |-a|$: Fallunterscheidung: Fall 1 $a \geq 0$: $|a| = a$, $|-a| = -(-a) = a$ ✓

Fall 2 $a < 0$: $|a| = -a$, $|-a| = -a$ ✓

$|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$

$\Leftarrow$ klar

$\Rightarrow$: Fallunterscheidung: Ü (3 Fälle)

2), 3), 6) analog: Ü

4) Nach 2) haben wir $a + b \leq |a| + |b|$

$-a - b \leq |a| + |b|$

Also gilt $|a+b| \overset{2)}{=} \max\{a+b, -(a+b)\} \leq |a|+|b|$

5) Nach der Δ-Ungl. gilt:

$$|a| = |\underbrace{a-b}_{1.\text{ Zahl}} + \underbrace{b}_{2.\text{ Zahl}}| \overset{4)}{\leq} |a-b| + |b|,$$

d.h.,
$$|a|-|b| \leq |a-b| \qquad \forall a,b$$

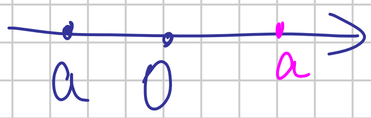
$a \leftrightarrow b$:
$$|b|-|a| \leq |b-a| \overset{1)}{=} |a-b|$$

$$\big||a|-|b|\big| \leq |a-b|$$
$\max\{\ldots\}$

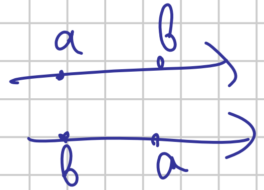
$\blacksquare$

Bem. 1) Geom. interpretation:

$|a|$ = Abstand von a zur Null



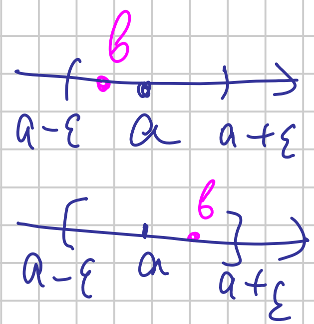
$|a-b|$ = Abstand zwischen a und b



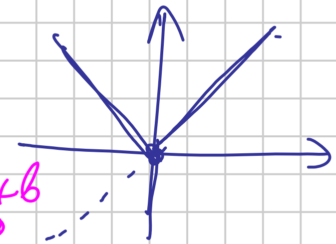
insbesondere gilt:

ii $|a-b| < \varepsilon \iff a-\varepsilon < b < a+\varepsilon$

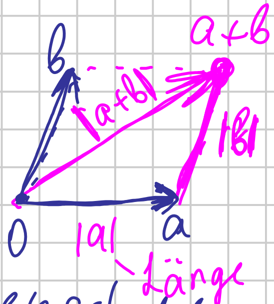
$|a-b| \leq \varepsilon \iff a-\varepsilon \leq b \leq a+\varepsilon$



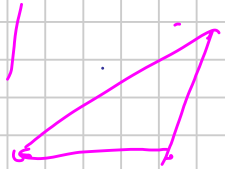
2) Graph von $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:



3) Δ - Ungleichung:



$|a+b| \leq |a| + |b|$



Weitere wichtige (zentrale) Eigenschaft von $\mathbb{R}$:

Vollständigkeit.

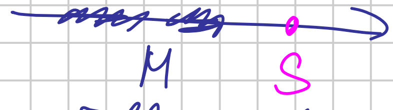
$\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}$ sind beide geordnete Körper. Aber:

$x^2 = 2$ ist in $\mathbb{Q}$ nicht lösbar.

in $\mathbb{R}$?

Def. 4.5 Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ heißt nach oben beschränkt, wenn M eine obere Schranke hat, d.h.,

(*) $$\exists s \in \mathbb{R} : \forall x \in M \ x \leq s$$



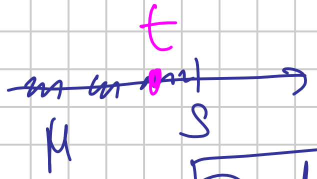
Eine der äquivalenten Charakterisierungen der Vollständigkeit ist:

Supremumsaxiom 4.6 Jede nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt eine/die kleinste obere Schranke in $\mathbb{R}$ (d.h., $\exists$ das kleinste $s \in \mathbb{R}$ mit (*)).
Sie wird das Supremum von M genannt, schreibe $\sup M$.

(Warum eindeutig?)

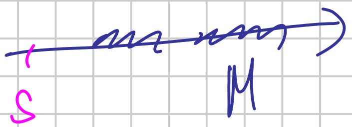
Bem. $s = \sup M \iff \begin{cases} \forall x \in M \ x \leq s & \text{(s ist eine obere Schranke von M)} \\ \forall t < s \ \exists x \in M: \ x > t \end{cases}$

($\forall t < s$ ist keine obere Schranke von M)



$\boxed{\text{Def. 4.7}}$ $M \subset \mathbb{R}$ heißt

- von unten beschränkt, wenn M eine untere Schranke hat, d.h.,
  $$\exists s \in \mathbb{R}: \ \forall x \in M \ \ x \geq s.$$

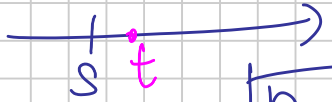


- beschränkt, wenn M von unten und nach oben beschr. ist, d.h., $\exists\, a, b$ mit
  $$M \subset [a, b].$$ (warum?)

Sup'Axiom $\Rightarrow$ (Warum?) $\forall$ von unten beschr. Menge M besitzt die (betrachte $-M$) größte untere Schranke, genannt **Infimum** von M, schreibe $\inf M$

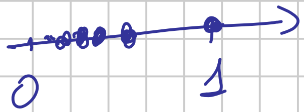
Bem.

$$s = \inf M \iff \begin{cases} \forall x \in M \quad x \geq s & (s \text{ ist eine untere Schranke}) \\ \forall t > s \ \exists x \in M : x < t & (\forall t > s \text{ ist keine untere Schranke}) \end{cases}$$



$\boxed{\text{Bsp}}$

- $\underbrace{\sup [a,b)}_{\text{hat kein Maximum! } \sup M \notin M} = b = \underbrace{\sup [a,b]}_{\sup M \in M} = \sup(-\infty, b] = \sup(-\infty, b)$
- $\inf [a,b) = a = \inf (a,b) = \inf (a,\infty) = \inf [a,\infty)$
- Für $M = \{ \frac{1}{n} ; n \in \mathbb{N} \}$ gilt:
  $\sup M = 1 = \max M$



$\inf M \overset{(O3)}{=} 0$ (warum?). Achtung: $\nexists \min M$.

Achtung: $\sup M \notin M$, $\sup M \in M$, $\inf M \notin M$, $\inf M \in \bar{M}$ – alles ist möglich!

$\boxed{\text{Proposition 4.8}}$ Sup'Axiom $\Longrightarrow$ Archimedisches Axiom (O3).

Beweis Ang.) $\exists a \in \mathbb{R}$ mit $\underbrace{n \leq a \ \forall n \in \mathbb{N}}_{a \text{ ist eine obere Schranke für } \mathbb{N}}$.

Sup'Axiom: $\exists s = \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$

Insb. gilt: $\forall n \in \mathbb{N}$ $\underbrace{n+1}_{\in \mathbb{N}} \leq s$

D.h., $s-1$ ist auch eine obere Schranke $n \leq s-1$

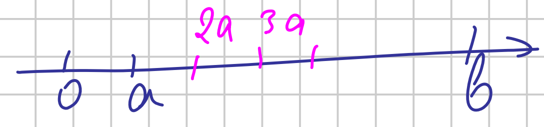
$\lightning$ $(s-1 < s$, also ist $s \neq \sup \mathbb{N})$ $\blacksquare$

Bem. (Äquiv. Aussagen zu (O3))

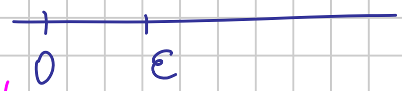
(O3) ist äquiv. zu jeder der Aussagen:

Ü

(O3') $\forall a, b > 0 \ \exists n \in \mathbb{N}: \quad n \cdot a > b$



(O3'') $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n \in \mathbb{N}: \ \frac{1}{n} < \varepsilon$.

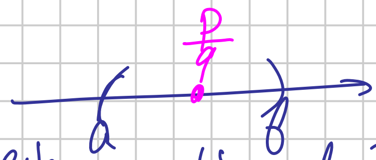


„egal, wie klein" (wenn für ein ε wahr, dann für alle größeren ε wahr.)

Aus dem Sup'Axiom und (O3'') folgt:

$\boxed{\text{Satz 4.9}}$ (Dichtheit von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$)

Jedes (offene) Intervall von $\mathbb{R}$ enthält eine rationale Zahl:

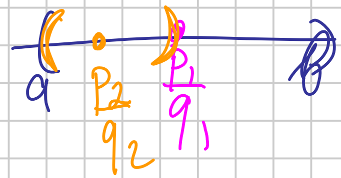


$\forall a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b \ \exists \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ mit

$\frac{p}{q} \in (a,b)$

Man sagt: $\mathbb{Q}$ liegt (oder: ist) dicht in $\mathbb{R}$.

Bem. 1) $\forall\, (a,b)$ enthält damit ∞-viele rat. Zahlen:



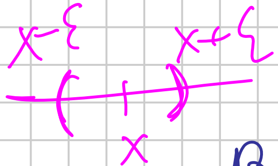
Schritt 1: Finde $\frac{p_1}{q_1} \in (a,b)$

Schritt 2: Finde $\frac{p_2}{q_2} \in \left(a, \frac{p_1}{q_1}\right)$

usw.

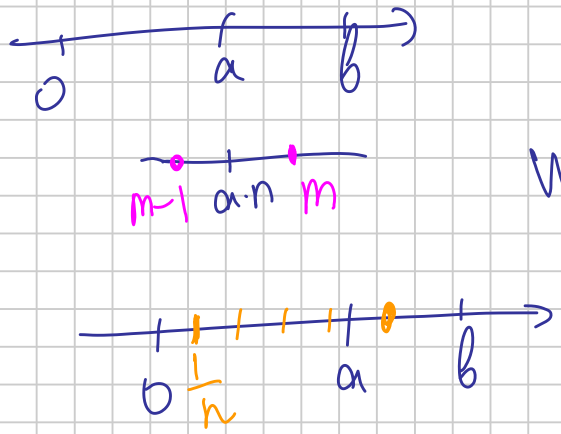
2) Man kann damit $\forall x \in \mathbb{R}$ beliebig nah mit rat. Zahlen approximieren:

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists a \in \mathbb{Q} \text{ mit } \underbrace{|x-a| < \varepsilon}_{\text{Abstand zu } a\, <\, \varepsilon}$$



Beweis des Satzes

Nach (O3'') $\exists n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < b-a$.



Betrachte $m := [a \cdot n] + 1$

– die kleinste Zahl aus $\mathbb{Z}$ mit $a \cdot n < m$.

Wir haben:

$$\underbrace{a < \underbrace{\frac{m}{n}}_{\text{rational}}}\ = \underbrace{\frac{m-1}{n}}_{\leq a} + \underbrace{\frac{1}{n}}_{< b-a} < \cancel{a} + b - \cancel{a} = b \qquad \blacksquare$$

$\boxed{\text{Satz 4.10}}$ (Existenz von Wurzeln)

$\exists!\, x \in \mathbb{R}_+$ mit $x^2 = 2$. Im Allg. gilt:

$$\forall a \in \mathbb{R}_+ \ \forall n \in \mathbb{N} \ \exists!\, x \in \mathbb{R}_+ \text{ mit } x^n = a.$$

(Bezeichnung: $\sqrt[n]{a}$)

<u>Idee des Beweises (für $\sqrt{2}$)</u>

1) <u>Eindeutigkeit</u>: Ang., $\exists\, x_1 \neq x_2$ mit $x_1^2 = 2 = x_2^2$ und $x_1, x_2 > 0$

Sei OBdA $x_1 < x_2$

ohne Beschränkung der Allgemeinheit

Es gilt dann aber $x_1^2 < \underbrace{x_2 \cdot x_1}_{\text{da } x_1, x_2 > 0} < x_2^2$, d.h., $2 < 2$ ↯

2) <u>Existenz</u> Betrachte die Menge:

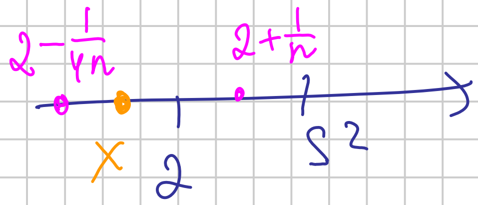
$$M := \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$$

- $M \neq \emptyset$ (z.B. $1 \in M$)
- M ist nach oben beschr. (z.B durch 2 – warum?)

Sup Axiom: $\exists\, s := \sup M$

z.z.: $s^2 = 2$.

Ang.) $s^2 > 2$. Nach (03'')



$\exists n \in \mathbb{N}: \; s^2 > 2 + \frac{1}{n}$

Da $s = \sup M$, ist $s - \frac{1}{4n}$ keine obere Schranke von M,

d.h., $\exists x \in M$ mit $x > s - \frac{1}{4n}$

Wir haben:

$$x^2 > \left(s - \frac{1}{4n}\right)^2 = \underbrace{s^2}_{> 2 + \frac{1}{n}} - \underbrace{\frac{s}{2n}}_{\leq \frac{2}{2n}} + \frac{1}{16n^2} \quad (\text{da } \underset{\sup}{s} \leq \underset{\text{eine obere Schr.}}{2})$$

$$> 2 + \cancel{\frac{1}{n}} - \cancel{\frac{2}{2n}} + \frac{1}{16n^2} > 2$$

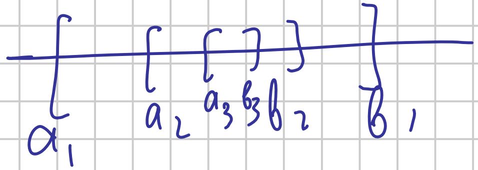
$\lightning$ $(x \notin M)$

Analog: $s^2 < 2$ führt zu $\lightning$ Hörsaalübung $\blacksquare$

D.h.: $s^2 = 2$.

$\boxed{\text{Def. 4.11}}$ Sei $\forall n \in \mathbb{N}$ ein abg. Intervall $I_n \subset \mathbb{R}$ gegeben mit

I1) $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots$



I2) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n \in \mathbb{N}$ mit Länge$(I_n) < \varepsilon$

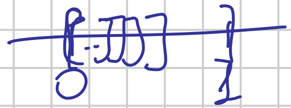
(Länge wird beliebig klein)

Dann heißt die Familie / Folge $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine

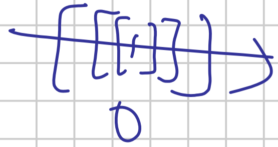
kommt später

Intervallschachtelung.

$\boxed{\text{Bsp}}$ $I_n = [0, \frac{1}{n}]$



$I_n = [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$ oder $[-\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n}]$ – warum ?



Eine weitere Eigenschaft von $\mathbb{R}$!

$\boxed{\text{Intervallschachtelungsprinzip 4.12}}$ (IP)

$\forall$ Intervallschachtelung (I_n) $\exists!\, x \in \mathbb{R}$ mit

$$x \in I_n \quad \forall n.$$

(d.h., $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$)

Bem. Für offene / halboffene Intervalle: falsch i.A.!

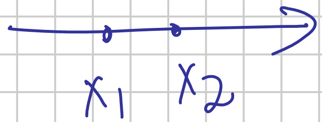
Bsp. $\bigcap_{n=1}^{\infty} (0, \frac{1}{n}] = \emptyset = \bigcap_{n=1}^{\infty} (0, \frac{1}{n})$

$\boxed{\text{Proposition 4.13}}$ Sup' Axiom $\Leftrightarrow$ IP

Beweis $\Rightarrow$ Sei $([a_n, b_n])$ eine Intervallsch.

ZZ.: $\exists!\, x$ mit $x \in [a_n, b_n]\ \forall n$.

Eindeutigkeit Ang.: $\exists\, x_1 \neq x_2$ mit dieser Eigenschaft.

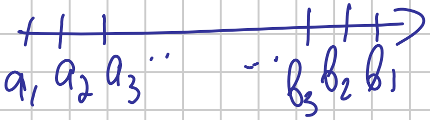


I2) für $\varepsilon := |x_1 - x_2|$ liefert:

$$\exists n : \underbrace{b_n - a_n}_{\text{Länge von } I_n} < |x_1 - x_2| \quad \lightning$$

(x_1 und x_2 können nicht beide in $[a_n, b_n]$ liegen).

Existenz Nach Vorauss. gilt



$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \text{ und } b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots$$

insb. gilt $\forall n$:

b_n ist eine obere Schranke für $\{a_1, a_2, \dots\}$

(Warum?)

Fall 1: a_j mit $j \leq n$: $a_j \leq a_n \leq b_n$

Fall 2: a_j mit $j > n$: $a_j \leq b_j \leq b_n$

Sup' Axiom:

$$x := \sup\{a_1, a_2, \dots\} \leq b_n \quad \forall n$$

Def. des Sup.

D.h., $\forall n$ gilt

$$a_n \leq x \leq b_n$$

$\blacksquare$

$\Leftarrow$ Hörsaalübung

<u>Bem.</u> 1) $\mathbb{R}$ ist durch die Axiome (geordneter Körper + Sup' Axiom) <u>bis auf Isomorphie</u> eindeutig bestimmt, d.h., $\forall$ geordneten Körper K mit dem Sup' Axiom

$\exists\, f: K \to \mathbb{R}$ bij,

das $+$, $\cdot$ und $\leq$ respektiert, d.h.,

$$f(a+b) = f(a) + f(b) \qquad \forall a, b \in K.$$
$$f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$$
$$a \leq b \iff f(a) \leq f(b)$$

So ein f heißt Isomorphismus zwischen geordn. Körpern.

$\boxed{\text{Bsp}}$: $(\mathbb{R}, +, *, \geq)$ statt $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ mit $a * b :\!= -a \cdot b$

6

nimm $f(x) :\!= -x$ - Warum Isom.?

2) Das Sup' Axiom nennt man auch Ordnungsvollständigkeit

Wir haben gesehen:

- $\mathbb{Q}$ ist nicht (Ordnungs)vollst.

z. B. hat $M := \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ kein Sup. in $\mathbb{Q}$.

- $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$ (z. B. $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ – irrational).

Wie viel größer ist $\mathbb{R}$?

Kardinalität von $\mathbb{R}$

$\boxed{\text{Def. 4.14}}$ Eine Menge M heißt

- abzählbar, wenn $|M| = |\mathbb{N}|$ (d. h., $\exists f : \mathbb{N} \to M$ bij)
- höchstens abzählbar, wenn M leer, endlich oder abzählbar ist; d. h., $|M| \leq |\mathbb{N}|$ (warum?)

- <u>überabzählbar</u>, wenn M unendlich mit $|M| \neq |\mathbb{N}|$

$\boxed{\text{Bsp}}$

0) $\mathbb{N}$ abz., $\mathbb{N}_0$ abz.

1) $\mathbb{Z}$ ist abz.: $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$, – Reihenfolge

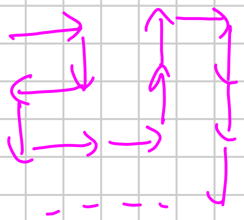
1. Element

d.h., $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$

2) $\mathbb{Q}$ ist abz.

$$\begin{array}{cccccccc}
0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & \ldots \\
\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & \ldots & \\
\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \ldots & & & \\
\ldots & & & & & & &
\end{array}$$

oder:



3) Endliche oder abz. Vereinigungen abz. Mengen sind abz. (analog zu 2!)

Endliche Produkte von abz. Mengen sind abz. — Hörsaalübung

4) Seien $M \subset N$. Es gilt:

M überabz. $\Rightarrow$ N überabz.

(d.h., N höchstens abz. $\Rightarrow$ M höchst. abz.)

<u>Beweis</u> N unendl. — klar

Ang.) N ist abz.; d.h., $N = \{n_1, n_2, n_3, \dots\}$

ZZ.: M ist abz.

Def.: $m_1 :=$ Element von M mit kleinstem Index in N.

$m_2 :=$ — " — $M \setminus \{m_1\}$ — " —

Also gilt: $M = \{m_1, m_2, \ldots\}$ $\lightning$ (M überabz.) $\blacksquare$

<u>Bem.</u> Manche/viele Bücher verwenden „abzählbar" statt „höchstens abz." und „abzählbar unendlich" statt „abzählbar"!

$\boxed{\text{Theorem 4.15}}$ (Cantor)

$\mathbb{R}$ ist überabzählbar

<u>Beweis (Cantorsches Diagonalverfahren / Diagonalargument)</u>

Es reicht z.z., dass $(0,1)$ überabz. ist.

Ang.) nicht, d.h., höchstens abz.

Da $(0,1)$ unendlich ist, muss $(0,1)$ abz. sein:

$$(0,1) = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$$

Zu jedem $x \in (0,1)$ sei $x = 0,a_1a_2\ldots$ die Desimaldarstellung ($a_j \in \{0,\ldots,9\}\ \forall j$), die eindeutig gewählt ist, z. B.

Achtung: $0,1000\ldots = 0,0999\ldots$

$0,\underset{\substack{\uparrow \\ \text{etwas}}}{*}000\ldots$ statt $0,*999\ldots$

$$x_1 = 0,a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}\ldots,$$
$$x_2 = 0,a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}\ldots,$$
$$x_3 = 0,a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}\ldots$$
$$\vdots$$

Betrachte $y := 0,b_1b_2b_3\ldots$ mit $b_j \in \underbrace{\{1,\ldots,8\}}_{\substack{\text{damit } 0,*00\ldots \\ \text{oder } 0,*999\ldots \\ \text{nicht vorkommt}}}\ \forall j$

s.d. $b_1 \neq a_{11},\ b_2 \neq a_{22}, \ldots$

Dann gilt: $y \neq x_1$, da $a_{11} \neq b_1$,
$y \neq x_2$, da $a_{22} \neq b_2$
usw.

D.h., $y \in (0,1)$ ist eine neue Zahl $\lightning$ $\blacksquare$

Bem. Cantorsche Kontinuumshypothese (1878) besagt:
$\forall M \subset \mathbb{R}$ unendlich gilt $|M| = |\mathbb{N}|$ oder $|M| = |\mathbb{R}|$,

d.h., $\nexists$ Menge mit Mächtigkeit echt zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$.

Gödel (1938) + Cohen (1960): weder beweisbar noch widerlegbar mit den Axiomen der Mengenlehre
$\rightsquigarrow$ ein weiteres Axiom (A oder $\overline{A}$)

5. Komplexe Zahlen

$x+1=2$ lösbar in $\mathbb{N}$

$x+2=1$ —"— $\mathbb{Z}$

$2x=1$ —"— $\mathbb{Q}$

$x^2=2$ —"— $\mathbb{R}$

$x^2+1=0$?

Euler: „$i=\sqrt{-1}$", 1777, „imaginär"

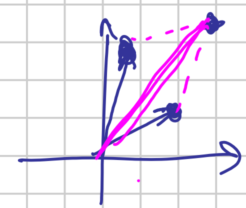
Gauß: „komplexe Zahl", 1831

$\boxed{\text{Def 5.1}}$ Die komplexen Zahlen sind def. als:

$$\mathbb{C} := (\mathbb{R}^2, +, \cdot) \quad \text{mit}$$

neu!

$$(x_1,y_1)+(x_2,y_2) := (x_1+x_2,\, y_1+y_2)$$



$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2,\ x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

$\boxed{\text{Satz 5.2}}$ $\mathbb{C}$ ist ein Körper mit

- $0 := (0,0)$ – neutr. Element bzgl. $+$
- $1 := (1,0)$ — " — $\cdot$
- $-(x,y) = (-x,-y)$ – inverse bzgl. $+$
- $(x,y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}\right)$ — " — $\cdot$ (falls $(x,y) \neq 0$)

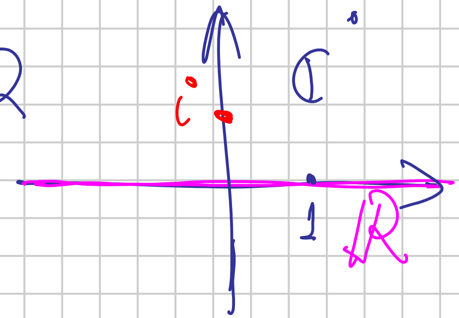
<u>Beweis</u> Ü / Hörsaalübung

<u>Bem.</u> $(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0)$

$$(x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1 \cdot x_2, 0)$$ – wie bei $\mathbb{R}$!

Wir identifizieren $(x, 0)$ mit x für $x \in \mathbb{R}$

Damit ist $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$



$\boxed{\text{Def. 5.3}}$ Def. $i := (0, 1)$

Bem. 1) $i^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (-1, 0) = -1$!

i ist eine Lösung von $z^2 + 1 = 0$. (Bem.: auch $-i$)

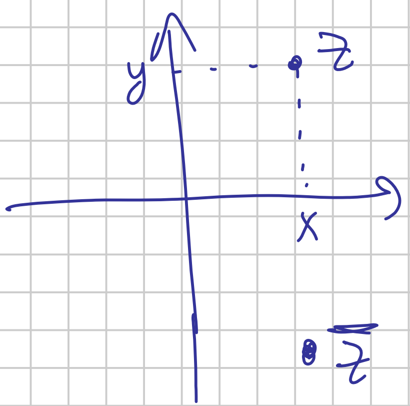
2) Für $z := (x, y)$ gilt

warum?

$$z = (x, 0) + (0, y) = \underbrace{(x, 0)}_{x} + \underbrace{(0,1)}_{i} \cdot \underbrace{(y, 0)}_{y},$$

d.h., $\boxed{z = x + iy}$

Def. 5.4 Sei $z = (x, y) = x + iy$. Man def.

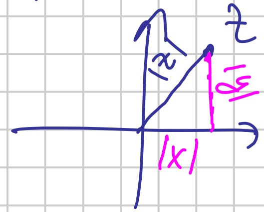


$\operatorname{Re} z := x$ (Realteil von z)

$\operatorname{Im} z := y$ (Imaginärteil von z)

$\bar{z} := x - iy$ (komplex Konjugierte)

$|z| := \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$ (Betrag von z)

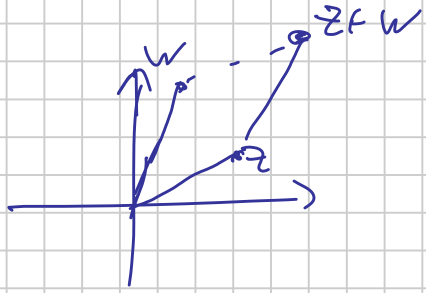


Bem.

- $|z|$ = Abstand von (x, y) zu 0
- $|(x, 0)| = \sqrt{x^2} = |x|$, d.h., für $x \in \mathbb{R}$ stimmt der kompl. Betrag mit dem Reellen überein.

- $|z| = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$, d.h., $z = 0$.

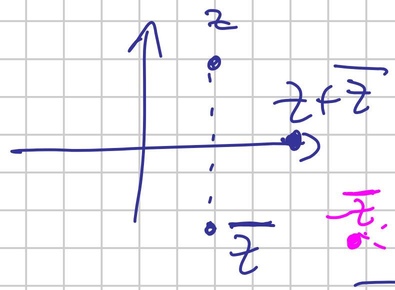
$\boxed{\text{Rechenregeln 5.5}}$ $\forall z, w \in \mathbb{C}$ gelten:



(a) $\mathrm{Re}(z+w) = \mathrm{Re}\,z + \mathrm{Re}\,w$

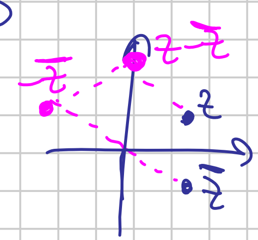
$\mathrm{Im}(z+w) = \mathrm{Im}\,z + \mathrm{Im}\,w$

(b) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$, $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$



(c) $z + \overline{z} = 2 \cdot \mathrm{Re}\,z$

$z - \overline{z} = 2 \cdot i \cdot \mathrm{Im}\,z$

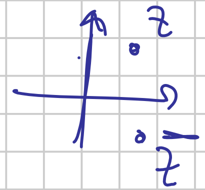


(d) $\overline{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

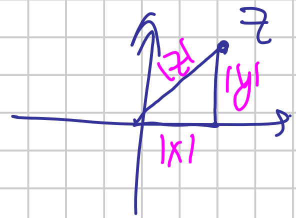
(e) $\overline{\overline{z}} = z$

(f) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

(g) $|z| = |\bar{z}|$



(h) $|\mathrm{Re}\, z| \leq |z|$
$|\mathrm{im}\, z| \leq |z|$



(j) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

(k) $|z^{-1}| = |z|^{-1}$, d.h., $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$, falls $z \neq 0$.

(l) $|z+w| \leq |z| + |w|$ – Δ-Ungl.

(m) $|z-w| \geq \big||z| - |w|\big|$ – Umgekehrte Δ-Ungl.

Achtung: im Allg.! $\mathrm{Re}(z\cdot w) \neq \mathrm{Re}\, z \cdot \mathrm{Re}\, w$ $\quad -1 = \mathrm{Re}(i^2) \neq 0\cdot 0$

$\mathrm{Im}(z\cdot w) \neq \mathrm{Im}\, z \cdot \mathrm{Im}\, w$ $\quad 0 = \mathrm{Im}(i^2) \neq 1\cdot 1$

Beweis (a)–(h) ü bzw. Hörsaalübung

(j) $|z\cdot w|^2 \overset{(f)}{=} z\cdot w\cdot \overline{z\cdot w} \overset{\text{kommut.}}{=} z\cdot\overline{z}\cdot w\cdot\overline{w} \overset{(f)}{=} |z|^2\cdot|w|^2$, where $\overline{z\cdot w} = \overline{z}\cdot\overline{w}$ nach (b)

$= (|z|\cdot|w|)^2$.

(k) $1 = |z\cdot z^{-1}| \overset{(j)}{=} |z|\cdot|z^{-1}|$, d.h. $|z^{-1}| = \dfrac{1}{|z|}$, sobald $z \neq 0$.

(l) $|z+w|^2 \overset{(f)}{=} (z+w)\cdot\overline{(z+w)} \overset{\text{Distributivgesetze}}{=} z\cdot\overline{z} + w\cdot\overline{z} + \overline{w}\cdot z + w\cdot\overline{w}$, where $\overline{(z+w)} = \overline{z}+\overline{w}$ nach (b), $z\cdot\overline{z} = |z|^2$, $w\cdot\overline{z} = \overline{\overline{w}\cdot z}$ (e),(b), $w\cdot\overline{w} = |w|^2$ nach (f)

$$= |z|^2 + \underbrace{\overline{w}\cdot z + \overline{\overline{w}\cdot z}}_{2\cdot \mathrm{Re}(\overline{w}\cdot z) \text{ nach (c)}} + |w|^2$$

$$= |z|^2 + 2\cdot \underbrace{\mathrm{Re}(\overline{w}\cdot z)}_{\leq |\overline{w}\cdot z| \text{ nach (h)}} + |w|^2$$

$$\underset{(j),\,(g)}{\leq} |z|^2 + 2\cdot |w|\cdot |z| + |w|^2 = \underbrace{(|z|+|w|)^2}$$

" ■ "

(m) folgt aus (l) wie in $\mathbb{R}$. ü

Bem. 1) Die Identifizierung von $\mathbb{R}$ mit der reellen Achse $\{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$ läuft durch

$$f : \mathbb{R} \to \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$$
$$f(x) := (x,0).$$

f ist ein <u>Körperisomorphismus</u>, d.h.,

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \text{ bij} \\ \bullet\ f(a+b) = f(a)+f(b) \\ \bullet\ f(a\cdot b) = f(a)\cdot f(b) \end{array}\right\} \forall a,b \in \mathbb{R}$$

ü

2) $i\cdot\mathbb{R} = \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$ heißt <u>imaginäre Achse</u>

3) $\nexists$ Ordnung $\precsim$ auf $\mathbb{C}$ s.d. $(\mathbb{C}, +, \cdot, \precsim)$ ein geordn. Körper ist.

Grund: $\forall$ geordn. Körper gilt $z^2 \succsim 0 \ \forall z$ (warum?)

Aber: $i^2 = -1 \succsim 0$
$1^2 = 1 \succsim 0$ $\Rightarrow 1 = 0$ ↯

4) Die Darstellung $z = x + iy$ heißt kartesische (oder algebraische) Darstellung

Polardarstellung kompl. Zahlen

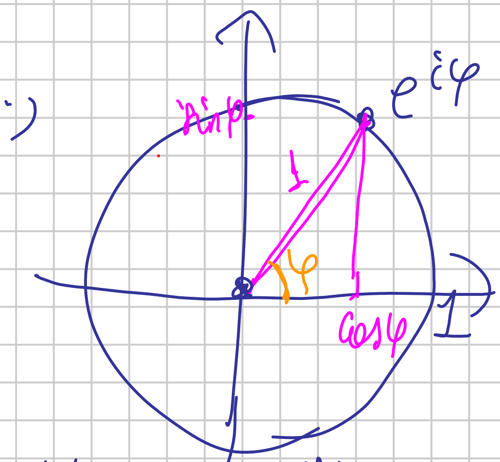
$\boxed{\text{Def 5.6}}$ Sei $\varphi \in \mathbb{R}$. Def. $e^{i\varphi} := \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$

<u>Bem.</u> 1) $|e^{i\varphi}| = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1$ d.h.:

$e^{i\varphi}$ liegt auf dem Einheitskreis

$\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$

φ ist dabei ein zugehör. Winkel



2) Erinnere: $\pi := \dfrac{\text{Umfang eines Kreises}}{\text{Durchmesser}} = \text{Länge des Halbkreises von } \mathbb{T}$

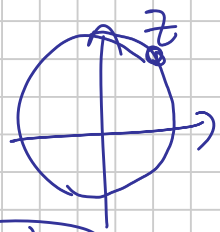
unabh. vom Radius   Radius $:= 1$

– entspricht dem Winkel $180°$.

Wir haben also: $e^{i(\varphi+2\pi)} = e^{i\varphi}$ $\forall \varphi \in \mathbb{R}$, d.h.,

die Fkt $\varphi \mapsto e^{i\varphi}$ (kurz: $e^{i\,\cdot}$) ist 2π-periodisch
$\mathbb{R} \to \mathbb{C}$

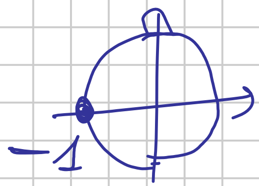
Variable

3) 

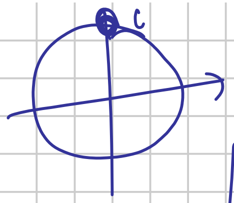
$\forall z \in \mathbb{T}$ gibt es ein $\varphi \in \mathbb{R}$ mit $z = e^{i\varphi}$, und φ ist eindeutig bis auf $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

$\boxed{\text{Bsp}}$

1) $-1 = e^{i\cdot\pi}$, d.h., $e^{i\cdot\pi} + 1 = 0$ (Euler)



2) $1 = e^{i\cdot 0} = e^{i\cdot 2\pi}$

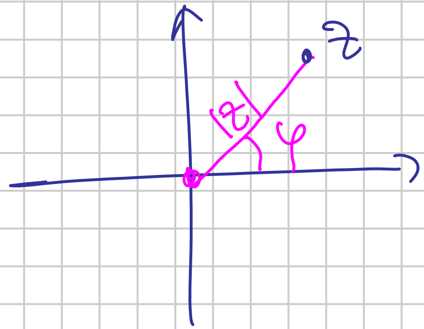


3) $i = e^{i\pi/2}$, $-i = e^{i\,3\pi/2} = e^{-i\pi/2}$

Folgerung 5.7 $\forall z \in \mathbb{C}$ $\exists \varphi \in \mathbb{R}$ mit

$\boxed{z = |z| \cdot e^{i\varphi}}$ – Polardarstellung von z,

wobei φ bis auf $2\pi b$, $b \in \mathbb{Z}$ eindeutig bestimmt ist, wenn $z \neq 0$.

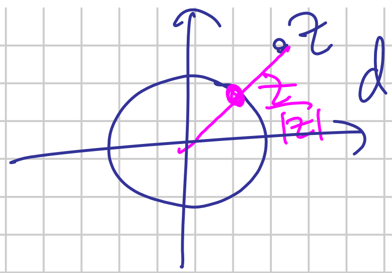


Beweis Fall 1: $z = 0$ – $\forall \varphi$ passt

Fall 2 $z \neq 0$ Def. $w := \frac{z}{|z|}$.

Wir haben (Rechenregeln):

$$|w| = \left|\frac{z}{|z|}\right| = \frac{|z|}{||z||} = \frac{|z|}{|z|} = 1,$$



d.h., $w \in \mathbb{T}$. Also gilt $w = e^{i\varphi}$ für ein bis auf $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ eindeutiges φ:

$$\frac{z}{|z|} = e^{i\varphi}, \text{ d.h., } z = |z| \cdot e^{i\varphi}$$

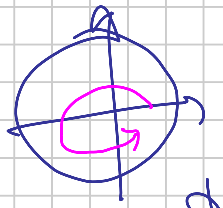
$\blacksquare$

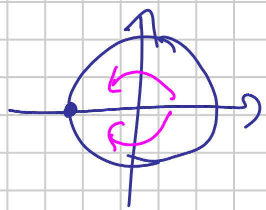
Jedes solche φ heißt Argument von z, schreibe $\varphi = \arg z$

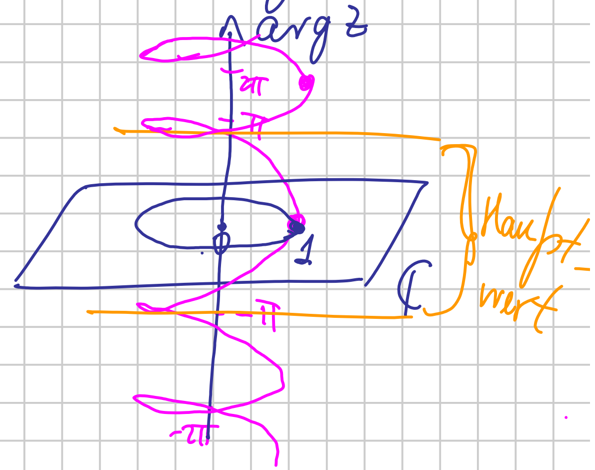
Achtung: $\arg z$ keine Fkt!

Oft wählt man $\varphi \in [0, 2\pi)$

oder $\underbrace{\varphi \in (-\pi, \pi]}_{\text{Hauptwert des Arguments}}$.







Dann ist φ eindeutig (für $z \neq 0$)

Wozu?

Beobachtung: Für $z = re^{i\varphi}$ und $w = Re^{i\psi}$ gilt

$$z \cdot w = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \cdot R \cdot (\cos\psi + i \cdot \sin\psi)$$

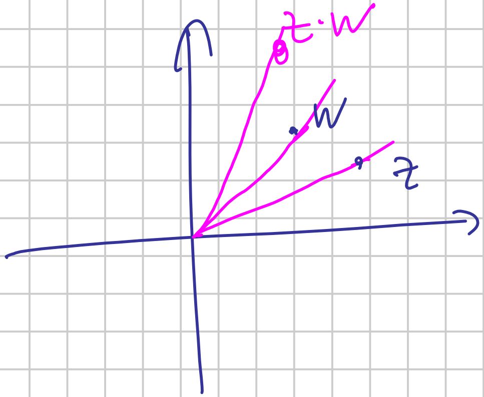
$i^2 = -1$

$$= r \cdot R\,(\overbrace{\cos\varphi \cdot \cos\psi - \sin\varphi \cdot \sin\psi}^{\cos(\varphi+\psi)}$$
$$+ i\,(\underbrace{\cos\varphi \cdot \sin\psi + \sin\varphi \cdot \cos\psi}_{\sin(\varphi+\psi)}))$$

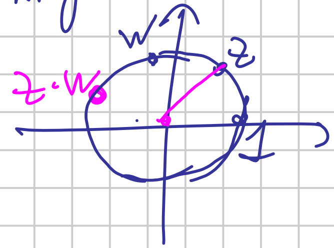
$$= r \cdot R \cdot (\cos(\varphi+\psi) + i \cdot \sin(\varphi+\psi))$$
$$= r \cdot R \cdot e^{i(\varphi+\psi)}$$

d.h.,
$$\boxed{z \cdot w = r \cdot R \cdot e^{i(\varphi+\psi)}}$$

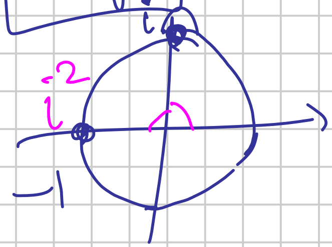
– Die Beträge multipl. sich und die Argumente addieren sich (mod 2π).



Wenn $|z| = 1$, d.h., $z \in \mathbb{T}$, dann ist die <u>Multiplikation</u> mit z einfach <u>Drehung</u> um das Argument von z.



$\boxed{\text{Bsp.}}$

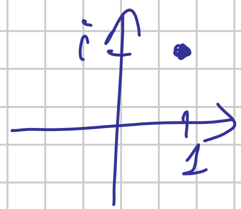


$z = i$. Polardarst.: $i = 1 e^{i\pi/2}$

$\Rightarrow \quad i^2 = 1 \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)} = e^{i\pi} =$

$\boxed{\text{Bsp}}$ (Kartesische Koord. $\Longleftrightarrow$ Polarkoord.)

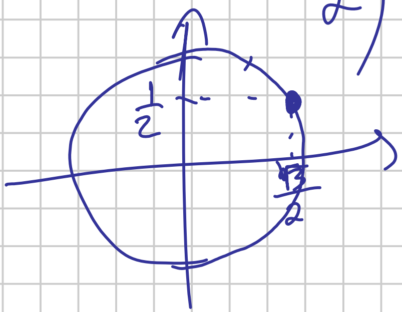
1) Polardarst. von $1+i$



$$|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$

$$\frac{1+i}{|1+i|} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\cos \pi/4} + i \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\sin \pi/4} = \cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{\pi}{4} = e^{i\pi/4}$$

d.h., $1+i = \sqrt{2} \cdot e^{i\pi/4}$



2) Kartes. Darstellung von $2 \cdot e^{i\pi/6}$

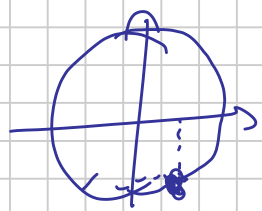
$$2e^{i\pi/6} = 2\left(\underbrace{\cos\frac{\pi}{6}}_{\frac{\sqrt{3}}{2}} + i \cdot \underbrace{\sin\frac{\pi}{6}}_{\frac{1}{2}}\right) = \sqrt{3} + i$$

$Re(\ldots) = \sqrt{3}$

$Im(\ldots) = 1$

Analog: $e^{-\pi/3} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$= \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$



Komplexe Wurzeln

Seien $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$. Finde alle z mit

$$z^n = w$$

Polardarstellung: $w = R \cdot e^{i\varphi}$. Gesucht: $z = r \cdot e^{i\psi}$

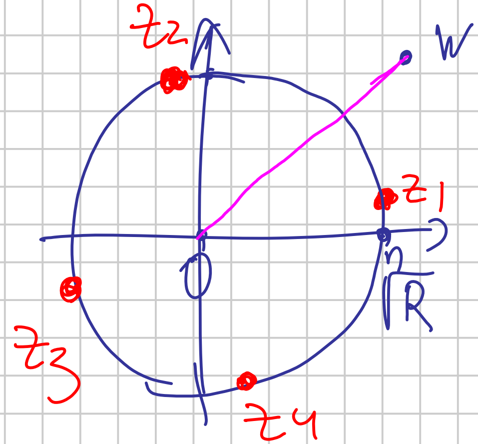
$$z^n = r^n \cdot e^{i \cdot n \cdot \psi} = R e^{i\varphi}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^n = R \\ \underbrace{n \cdot \psi = \varphi + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}}_{\psi = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}, \ k \in \mathbb{Z}} \end{cases}$$

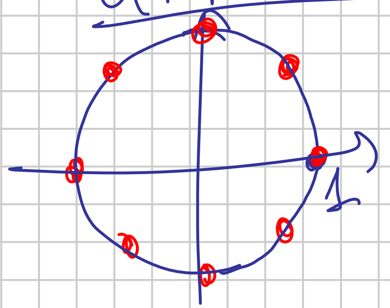
$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{R} \\ \psi = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}, \ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Es gibt also genau n verschiedene Lösungen:

$$\boxed{\begin{aligned} z_1 &= \sqrt[n]{R}\, e^{i\frac{\varphi}{n}} \\ z_2 &= \sqrt[n]{R}\, e^{i\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi}{n}\right)} \\ &\vdots \\ z_n &= \sqrt[n]{R}\, e^{i\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi(n-1)}{n}\right)} \end{aligned}}$$



Einheitswurzeln: Da $1 = 1 \cdot e^{i \cdot 0}$



$$\underbrace{\sqrt[n]{1}}_{\text{hier als Menge}} = \left\{ 1, e^{i\,2\pi/n}, \dots, e^{i \cdot \frac{2\pi(n-1)}{n}} \right\}$$

– bildet eine Gruppe bzgl. Multipl. (Hörsaalübung)

__Bem.__ $\mathbb{C}$ wurde so def., dass $x^2+1=0$ eine Lösung hat.

Es gilt aber viel mehr:

$\boxed{\text{Satz 5.8}}$ (<u>Fundamentalsatz der Algebra</u>)

Jedes Polynom $p: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $p(z) := a_0 + a_1 z + \ldots + \underbrace{a_d}_{\neq 0} z^d$

$(a_0, \ldots, a_d \in \mathbb{C})$ mit Grad $d = \text{Grad}\, P \geq 1$ hat

mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

Beweis – später im Studium

$\boxed{\text{Bsp}}$ $z^2+z+1=0$, $z = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \overset{\text{formal}}{=} \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

Ü: Die Formel $z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ gilt nach wie vor

Bem. 1) Für Grad $p \geq 5$ $\nexists$ Formel/Algorithmus für die Nullstellen.

2) Insb. muss man (~~oft~~) bei reellen Problemen (wie: $x^2+x+1=0$) ins Komplexe gehen, um sie zu lösen/verstehen.