Notiztitel 16.10.2018

Analysis I

WS 18/19

Homepage der Vorlesung:
www.math.uni-leipzig.de/~eisner/ana1.html

Tanja Eisner: eisner@math.uni-leipzig.de

Übungsaufgaben: Abgabe Di vor 11:10
Getackert, Name, Matrikelnummer, Ü'Gruppe

I. Einführung: Aussagen, Mengen, Abbildungen, Relationen und Zahlen

1. Aussagenlogik

Anfang: Aristoteles

Def. 1.1 Eine Aussage ist ein Sachverhalt (Satz), der entweder wahr (w, true, 1) oder falsch (f, false, 0) ist. „Wahr" und „falsch" heißen Wahrheitswerte.

Bsp

- Bach war ein Komponist : w
- Leipzig liegt in Italien : f
- Wie spät ist es? – keine Aussage
- Gelb ist besser als Blau
- Diese Aussage ist falsch

Def. 1.2 Enthält eine Aussage eine oder mehrere Variablen, von denen der Wahrheitswert abhängt, nennt man sie eine <u>Aussageform</u>.

z. B.: $A(x): \quad x+1=2$

$A(1): w, \quad A(17): f, \quad A(\text{Hund}): f$

Operationen mit Aussagen (Junktoren)

Wie bildet man neue Aussagen?

1 Verneinung / Negation: $\overline{A}$ oder $\neg A$ (nicht-A)

Die Verneinung einer Aussage A ist eine Aussage, die

- wahr ist, wenn A falsch ist
- falsch — " — wahr

A	$\overline{A}$
w	f
f	w

$\overline{A}$ ist also durch die Wahrheitstabelle gegeben.

$\boxed{\text{Bsp}}$ $A :=$ „Alle Autos sind blau"

$:=$ heißt „ist definiert durch"

$\overline{A}$ = „Es ist nicht der Fall, dass alle Autos blau sind"

= „Es gibt (mindestens) ein Auto, das nicht blau ist"

Quantoren (Operatoren der Logik)

$\forall$:= „für alle", „für jede/s/n"

$\exists$:= „es existiert ein/e", „es gibt ein/e/n"

$\exists!$:= „es gibt genau ein/e/n"

$\boxed{\text{Bsp 1.3}}$ Sei $A(x)$ eine Aussageform, z. B.,

$A(x) :=$ „x ist blau",

wobei x für „Auto" steht.

Dann gilt für $B :=$ „$\forall x \ A(x)$",

(∀ x gilt $A(x)$)

dass

$$\overline{B} = „\exists x : \overline{A(x)}"$$

so dass

D.h., $\boxed{„\overline{\forall x \ A(x)}" = „\exists x : \overline{A(x)}"}$ (d.h., ∀ wird zu ∃ + Negation)

Analog: $\boxed{\overline{\exists x : A(x)} = \forall x \ \overline{A(x)}}$ (d.h., ∃ wird zu ∀ + Negation).

Daraus folgen verschiedene Beweismethoden:

Direkter Beweis: Zeige A.

Indirekter Beweis / Widerspruchsbeweis: Zeige, dass $\overline{A}$ falsch ist.

$\boxed{\text{Bsp } 1.4}$ $\sqrt{2}$ ist irrational.

__Beweis__ Ang., nicht, d.h., $\sqrt{2}$ ist rational: $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ für p, q teilerfremd: $\underbrace{(p,q)}_{\text{ggT von } p \text{ und } q} = 1$. Dann gilt

$$2 \cdot q^2 = p^2.$$

Daraus folgt, dass $2 \mid p^2$, also $2 \mid p$. Also gilt $4 \mid p^2$, also $4 \mid 2q^2$, d.h., $2 \mid q^2$. Daraus folgt $2 \mid q$ ↯ Widerspruch (p und q sind doch nicht teilerfremd) ∎

$\boxed{\text{Bsp 1.5}}$ $\exists$ ∞-viele Primzahlen.
unendlich

Beweis Ang., falsch, d.h., $\exists$ nur endlich viele Primzahlen $p_1, \dots, p_k$. Dann ist

$$p_1 \cdot \ldots \cdot p_k + 1$$

auch eine Primzahl (da durch kein p_i teilbar – warum?)
Wir haben eine neue Primzahl ↯ ∎
warum?

(2) Implikation: $A \to B$, $A \Rightarrow B$ (aus A folgt B; A impliziert B; wenn A, dann B; A ist eine hinreichende Bedingung für B; B ist eine notwendige Bedingung für A)

$A \to B$ (bzw. $A \Rightarrow B$) ist durch die W'Tabelle

A	B	$A \to B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

definiert

Achtung: Aus Falschem folgt Beliebiges!

Bsp.: Wenn es regnet, ist die Straße nass.

$A =$ „Es regnet", $B =$ „Die Straße ist nass"

$A \Rightarrow B$

Äquivalenz: $A \Leftrightarrow B$, $A \Longleftrightarrow B$ (genau dann A, wenn B, A genau dann, wenn B; A dann und nur dann, wenn B)

$A \Leftrightarrow B$ (bzw. $A \Leftrightarrow B$) ist durch die W'Tabelle

A	B	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

gegeben. A und B sind also äquivalent, wenn sie den gleichen Wahrheitswert haben

$\boxed{\text{Bsp}}$ • $A =$ „es regnet“, $B =$ „Die Straße ist nass“

$A \not\Leftrightarrow B$

(Es kann sein, dass B richtig ist und A falsch)

"Heute ist Dienstag $\Longleftrightarrow$ gestern war Montag"

Wir schreiben auch $A \equiv B$ statt $A \Longleftrightarrow B$

<u>Beobachtung</u>

$$\boxed{\text{"}A \Rightarrow B\text{"} \equiv \text{"}\overline{B} \Rightarrow \overline{A}\text{"}}$$

<u>Beweis</u> durch W'Tabelle:

A	B	$A \Rightarrow B$	$\overline{B}$	$\overline{A}$	$\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$
w	w	w	f	f	w
w	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w
f	f	w	w	w	w

die gleichen W' Werte

∎

Dadurch erhalten wir weitere Beweismethoden

- direkter Beweis : $A \Rightarrow B$
- indirekter Beweis (Kontraposition): zeige $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$.

③ Konjunktion („und"), Disjunktion („oder", „nicht ausschließendes Oder")

„A und" (schreibe $A \wedge B$) und „A oder B" (schreibe $A \vee B$) sind durch

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$
w	w	w	w
w	f	f	w
f	w	f	w

f	f	f	f

definiert.

A und B genau dann wahr, wenn beide wahr
A oder B — " — , wenn mindestens eine der Aussagen wahr.

$\boxed{\text{Bsp 1.7}}$ • „Mein Auto ist blau"
= „ich habe (genau) ein Auto" und
„Dieses Auto ist blau"

Negation: „Ich habe kein Auto oder ich habe (genau) ein Auto, welches nicht blau ist.
oder ich habe mehrere Autos"

Beobachtung „$A \Leftrightarrow B$" $\equiv$ („$A \Rightarrow B$" und „$B \Rightarrow A$")

Beweis: W'Tabelle Ü

Insb. gilt:

„$A \not\Leftrightarrow B$" $\equiv$ („$A \not\Rightarrow B$" oder „$B \not\Rightarrow A$")

Allgemein gelten De Morgansche Gesetze:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{A \text{ und } B} \equiv \overline{A} \text{ oder } \overline{B} \\ \overline{A \text{ oder } B} \equiv \overline{A} \text{ und } \overline{B} \end{array}\right\} \text{Ü}$$

(„und" und „oder" werden vertauscht + Verneinung)

Neben „oder" ($\vee$) gibt es auch ein

„ausschließendes Oder" ($\dot{\vee}$), def. durch

A	B	$A \dot{\vee} B$
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	f

$A \dot{\vee} B$ wahr genau dann, wenn genau eine Aussage wahr.
„entweder A oder B"

Weitere De Morgansche Gesetze: siehe Ü'Blatt 1.

2. Mengen, Abbildungen und Relationen

$\boxed{\text{Def. 2.1}}$ (Georg Cantor, 1895) Eine <u>Menge</u> ist eine Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten (welche die <u>Elemente</u> von M genannt werden) zu einem Ganzen.

Bezeichnung:
- $x \in M$ (oder $M \ni x$), wenn x ein Element der Menge M ist
- $x \notin M$ (oder $M \not\ni x$), wenn x kein –"–

<u>Bem.</u> Eine Menge ist <u>eindeutig</u> durch ihre Elemente bestimmt, d.h.,

$M_1 = M_2 \iff \forall x$ gilt $(x \in M_1 \iff x \in M_2)$

$\boxed{\text{Bsp}}$ $\{*, \circ\} = \{\circ, *\} = \{*, \circ, *\}$

$\boxed{\text{Def. 2.2}}$ Die leere Menge ist die Menge, die kein Element enthält. Bezeichnung: $\emptyset$

<u>Bemerkung</u> Wir werden später sehen, dass diese Def. einer Menge „naiv" ist und zu Paradoxen führen kann. Die moderne axiomatische Mengenlehre ist später (1930) entstanden und basiert auf Zermelo-Fraenkel-Axiomen (ZF) bzw. ZF mit dem Auswahlaxiom (ZFC). choice

Bei Interesse bitte nachlesen!

Relationen und Operationen mit Mengen

1 Teilmengen / Obermengen / Komplement

$\boxed{\text{Def. 2.3}}$ Seien M, N Mengen. M heißt **Teilmenge** von N (schreibe $M \subset N$ oder $N \supset M$), wenn

$$\forall x \quad (x \in M \Rightarrow x \in N)$$

Euler-Diagramm für $M \subset N$

(D.h.: $\forall$ Element von M ist auch Element von N), in diesem Fall heißt N eine **Obermenge** von M. Das **Komplement** von M in N (schreibe $N \setminus M$ oder M^c) ist die Menge

ohne

complement

$\{x : x \in N , x \notin M\}$

so dass und

Venn-Diagramm für $N \setminus M$

Wir schreiben $M \subsetneqq N$, wenn $M \subset N$ und $M \neq N$, und wir nennen M eine echte Teilmenge, wenn noch dazu $M \neq \emptyset$.

(Manche Bücher benutzen $M \subset N$ für echte TM und $M \subseteq N$ für TM).

Teilmengen

$\boxed{\text{Bsp}}$ $\{*\} \subsetneqq \{*, 0\}$, $\{*, 0\} \setminus \{*\} = \{0\}$

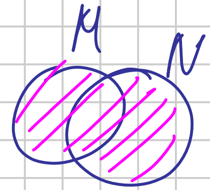
Achtung: $\emptyset \subset M$ $\forall M$ (aus Falschem folgt alles)

$M \subset M$ $\forall M$ – klar.

__Bem.__ $M = N \iff M \subset N$ und $N \subset M$ (warum?)

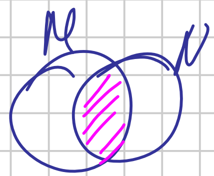
② __Vereinigung__ von M und N ist

$$M \cup N := \{x : x \in M \text{ oder } x \in N\}$$



__Durchschnitt__ von M und N ist

$$M \cap N := \{x : x \in M \text{ und } x \in N\}$$



$\boxed{\text{Bsp}}$

- $\{✲, \square, \circ\} \cup \{\square, \triangle\} = \{✲, \square, \circ, \triangle\}$
- $\quad$ –"– $\quad \cap \quad$ –"– $\quad = \{\square\}$

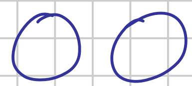
- $M \subset N \Rightarrow M \cup N = N, \quad M \cap N = M$

- $\emptyset \cap M = \emptyset$, $\emptyset \cup M = M$

<u>Bem.</u> $\cup$ entspricht „oder" und $\cap$ entspricht „und"
(auch analoge Regeln zu De Morganschen Gesetzen, siehe Ü'Blatt 1)

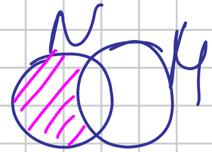
$\boxed{\text{Def}}$ M und N heißen <u>disjunkt</u>, wenn $M \cap N = \emptyset$ (keine gemeinsamen Elemente)

(z.B.: M und M^c sind disjunkt)



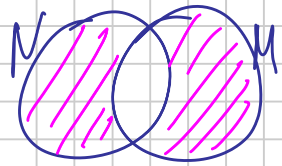
③ <u>Differenz</u> von M und N ist

$$N \setminus M := \{x : x \in N, x \notin M\}$$



(Wenn $M \subset N$, dann = Komplement)

Symmetrische Differenz von M und N:



$$M \triangle N := (M \setminus N) \cup (N \setminus M)$$

(Elemente, die in genau einer Menge liegen)

Hörsaalübung

Ü $\quad M \triangle N = (M \cup N) \setminus (M \cap N)$

Achtung: Euler/Venn-Diagramme sind sehr hilfreich, aber: kein Beweis!

Bsp

$\{*, \circ\} \setminus \{*, \square\} = \{\circ\}$

$\{*, \circ\} \triangle \{*, \square\} = \{\circ, \square\}$

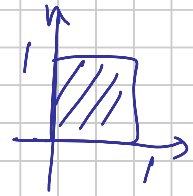
Kartesisches Produkt (oder: Produkt) von M und N:

$$M \times N := \{(x, y) : x \in M, y \in N\}$$

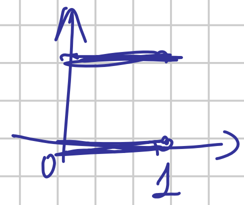
$\boxed{\text{Bsp}}$

- $[0,1]^2 = \{(x,y) : x, y \in [0,1]\}$

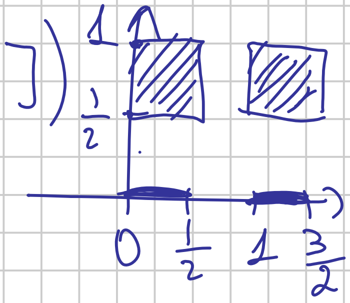
$M^2 = M \times M$



- $\underbrace{[0,1]}_{\text{intervall}} \times \{0,1\} =$



- $\left([0,\tfrac{1}{2}] \cup [1,\tfrac{3}{2}]\right) \times \left(\{0\} \cup [\tfrac{1}{2}, 1]\right)$



5 Potenzmenge von M ist

$$\mathfrak{P}(M) := \{ N : N \subset M \}$$

(Menge aller Teilmengen von M)

$\boxed{\text{Bsp}}$ $\mathfrak{P}(\{*\}) = \{ \emptyset, \{*\} \}$

$\mathfrak{P}(\{*, 0\}) = \{ \emptyset, \{*\}, \{0\}, \{*, 0\} \}$

$\{1, 3\} \in \mathfrak{P}(\{\quad, 3\})$

<u>Bem.</u> 1) Wenn M n Elemente hat, hat $\mathfrak{P}(M)$ 2^n Elemente (warum?)

2) Analog def. man $\cup$, $\cap$, $\prod$ (Produkt) für

endlich viele Mengen:

$$\bigcap_{j=1}^{n} M_j := \{x : x \in M_1, x \in M_2, \dots, x \in M_n\}$$
$$= \underbrace{M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_n}_{\text{egal, wo man die Klammer setzt}}$$

$$\bigcup_{j=1}^{n} M_j := \{x : x \in M_1 \text{ oder } \dots\dots x \in M_n\}$$
$$= M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_n$$

$$\prod_{j=1}^{n} M_j := M_1 \times \dots \times M_n := \left\{ (x_1, \dots, x_n) : \begin{array}{l} x_1 \in M_1 \\ x_2 \in M_2 \\ \dots \\ x_n \in M_n \end{array} \right\}$$

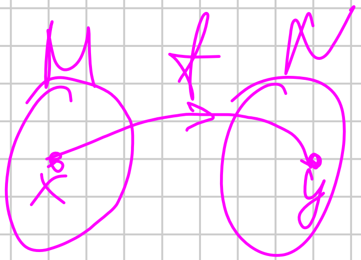
Analog def. man $\cup, \cap, \prod$ für beliebige Familien von Mengen:

Sei I eine Indexmenge, $\forall \alpha \in I$ sei M_α eine Menge:

$$\bigcup_{\alpha \in I} M_\alpha, \quad \bigcap_{\alpha \in I} M_\alpha, \quad \prod_{\alpha \in I} M_\alpha = \left\{ (x_\alpha)_{\alpha \in I} : \begin{array}{l} x_\alpha \in M_\alpha \\ \forall \alpha \in I \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(M)), \quad \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(M))), \ldots$$

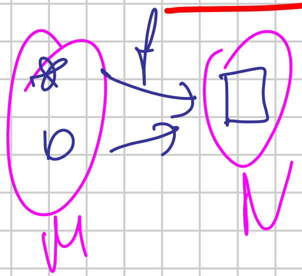
$\boxed{\text{Def. 2.4}}$ Seien M, N zwei Mengen. Eine Abbildung f von M nach N (schreibe $f: M \to N$) ist ein Gesetz, das jedem $x \in M$ genau ein $y \in N$ zuordnet (schreibe $x \mapsto y$, $f(x) = y$) „x wird auf y abgebildet"



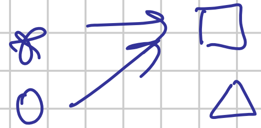
Dabei ist (M, N, f) eine Abbildung. Wenn M und N klar sind, schreiben wir f.

M heißt <u>Definitionsmenge</u> von f, N <u>Bildmenge</u> oder Wertebereich von f.
Wenn N (und M) aus Zahlen bestehen, heißt f eine <u>Funktion</u>.

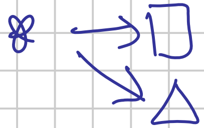
Bsp

1) 

$f: \{*, \circ\} \to \{\square\}$, $f(*) = f(\circ) = \square$

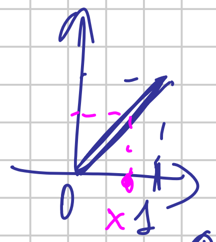
2) 

$f: \{*, \circ\} \to \{\square, \triangle\}$ -||- ———

3) 

keine Abb.!

4) $f(x) = x$, $f: \underbrace{[0,1]}_{\text{Intervall: alle } x \text{ mit } 0 \le x \le 1} \longrightarrow [0,1]$

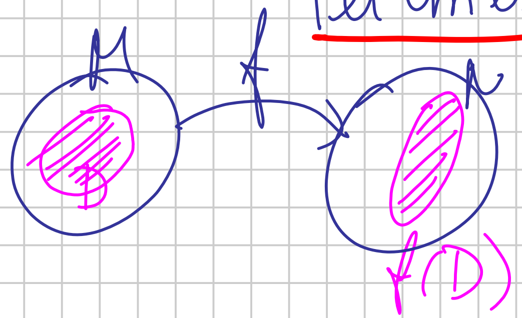


Aber  – keine Abb.!

$\boxed{\text{Def 2.5}}$ Der Graph einer Abb. $f: M \to N$ ist die Menge

$$G_f := \{(x,y) : x \in M,\ y \in N,\ f(x) = y\}$$

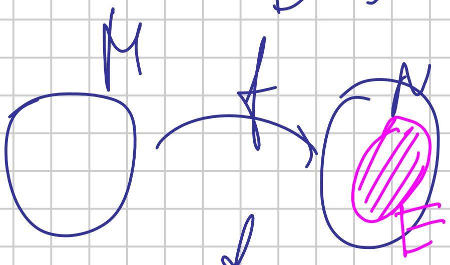
Das Bild von $x \in M$ ist $f(x)$. Das Bild einer



<u>Teilmenge</u> $D \subset M$ ist def. durch

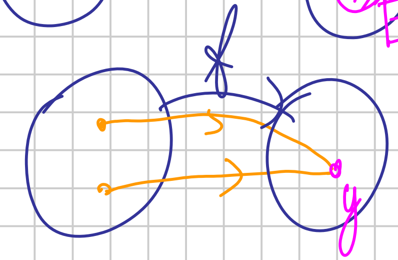
$$f(D) := \{f(x) : x \in D\} \subset N$$

<u>Das Bild von f</u> ist $f(M) \subset N$.



Das <u>Urbild</u> von $E \subset N$ ist

$$f^{-1}(E) := \{x \in M : f(x) \in E\}$$



Das <u>Urbild von y</u> $\in N$ ist

$$f^{-1}(y) := f^{-1}(\{y\}) = \{x \in M : f(x) = y\} \subset M.$$

Bsp Sei $f: \{*, \circ\} \to \{\square, \bullet\}$ mit $\begin{array}{ccc} * & \to & \square \\ \circ & \nearrow & \bullet \end{array}$

Dann gilt $f(*) = \square$, $f^{-1}(\square) = \{*, \circ\}$, also:

$$f^{-1}(f(*)) = \{*, \circ\} \underset{\neq}{\supset} \{*\}$$

Ü Allgem. Regeln:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \forall D \subset M \text{ gilt} & f^{-1}(f(D)) \supset D \\ \forall E \subset N \text{ gilt} & f(f^{-1}(E)) \subset E \end{array}}$$

Bsp oben:

$$f^{-1}(\{\square, \circ\}) = \{*, \circ\}$$

$$f(f^{-1}(\{\square, \circ\})) = f(\{*, \circ\}) = \{\square\} \subsetneq \{\square, \circ\}.$$

Bemerkung Urbilder verhalten sich besser als Bilder bzgl. $\cup$, $\cap$, Komplementbildung:

$\boxed{\text{Proposition 2.6}}$ Sei $f: M \to N$. Dann gelten:

$$\boxed{\begin{aligned} &\left.\begin{aligned} f^{-1}(A \cap B) &= f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \\ f^{-1}(A \cup B) &= f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \end{aligned}\right\} \forall A, B \subset N \\ &\left.\begin{aligned} f(A \cap B) &\subset f(A) \cap f(B) \\ f(A \cup B) &= f(A) \cup f(B) \end{aligned}\right\} \forall A, B \subset M \end{aligned}}$$

Beweis: Erste Behauptung: Für $\forall x \in M$ gilt:

$$x \in f^{-1}(A \cap B) \underset{\text{Def. des Urbildes}}{\iff} f(x) \in A \cap B \underset{\text{Def. von } \cap}{\iff}$$

$\Longleftrightarrow f(x) \in A$ und $f(x) \in B$

$\Longleftrightarrow x \in f^{-1}(A)$ und $x \in f^{-1}(B)$

Def. des Urbildes

$\Longleftrightarrow x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

Def. des $\cap$

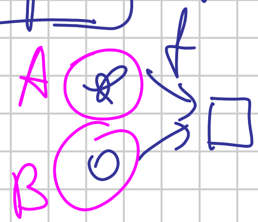
$\blacksquare$ Ende des Beweises

oder: q.e.d.
quod erat demonstrandum
"was zu beweisen war!"

Regt: ☹

$\boxed{\text{Bsp}}$ $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$ im Allg.

$\exists f, A, B$ mit $\neq$.



$A = \{⊛\}$
$B = \{○\}$

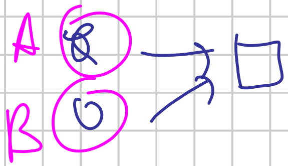
$f(⊛) \cap f(○) = \{\square\}$
$f(\{⊛\} \cap \{○\}) = \emptyset$

Analog gelten:

$$\boxed{\begin{aligned} f^{-1}(A \setminus B) &= f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B) \\ f(A \setminus B) &\supset f(A) \setminus f(B) \end{aligned}}$$ – Hörsaal-übung

Konvention: $f(\emptyset) = \emptyset$

$\boxed{\text{Bsp}}$ $f(A \setminus B) \neq f(A) \setminus f(B)$ im Allg. – wie oben:

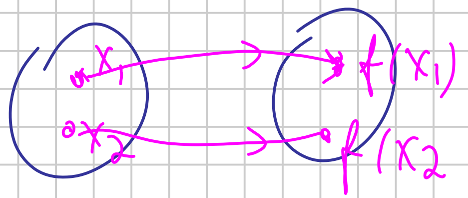


$A \setminus B = \{\emptyset\}$

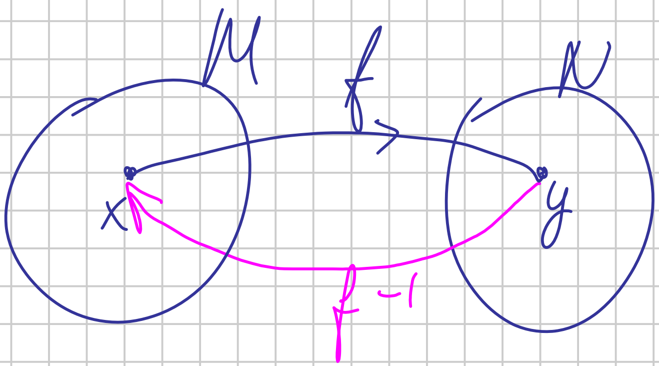
$f(A) \setminus f(B) = \emptyset$

$\boxed{\text{Def. 2.7}}$ Sei $f: M \to N$. Dann heißt f

- surjektiv, wenn $\forall y \in N$ ein Urbild hat, d.h., $\forall y \in N \; \exists x \in M: f(x) = y$.



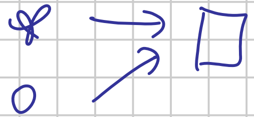
- <u>injektiv</u>, wenn $\forall x_1, x_2 \in M$
  $$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2,$$
  d.h., verschiedene Elemente aus M werden auf verschiedene Elemente aus N abgebildet.

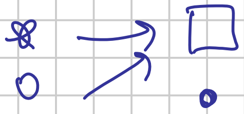


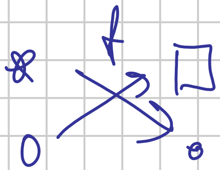
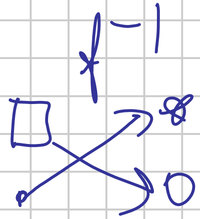
- <u>bijektiv</u>, wenn surj. und inj., d.h.,
  $$\forall y \in N \ \exists!\, x \in M \text{ mit } f(x) = y$$
  In diesem Fall heißt die Abb.
  $$f^{-1} : N \to M \text{ mit } f^{-1}(y) := x,$$
  wobei x das eindeutige Urbild von y unter f ist,

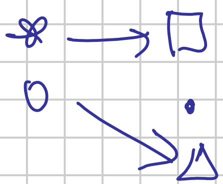
die Umkehrabbildung (bzw. Umkehrfunktion)
von f.

Bsp

1)  surj, nicht inj, nicht bij.

2)  weder surj noch inj

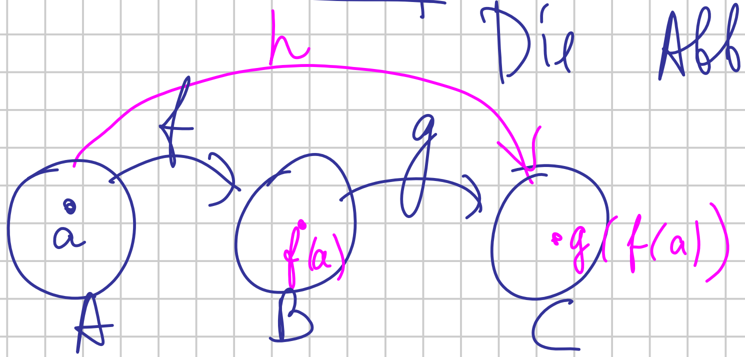
3)  bij, Umkehrabb. 

4)  inj, nicht surj, nicht bij.

Def. 2.8 Seien A, B, C Mengen, $f: A \to B$, $g: B \to C$.
Die Abb. $h: A \to C$ mit

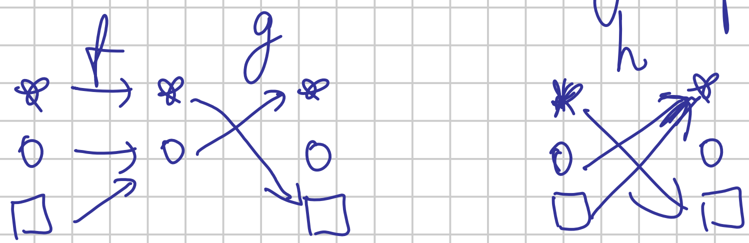
$$h(a) = g(f(a)) \quad \forall a \in A$$

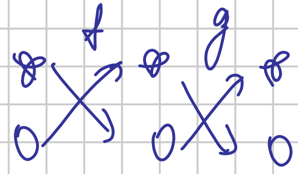
heißt **Verkettung** (oder **Komposition**) von f und g.

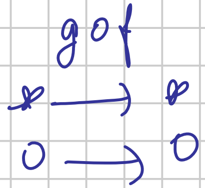


Schreibweise: $h = g \circ f$ – „g nach f" (Achtung: Reihenfolge wie in $g(f(a))$).

Bsp 1)

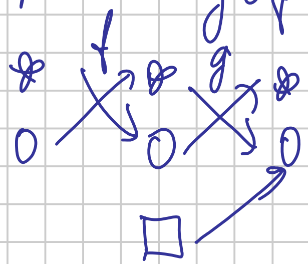


2) 



Die Umkehrabb. ist $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$, sobald f^{-1} und g^{-1} existieren. (Ü)

Aber $g \circ f$ kann bij sein, und f und g nicht:



Ü Es gelten Implikationen:

$$\boxed{\begin{array}{l} g \circ f \text{ inj} \Rightarrow f \text{ inj} \\ g \circ f \text{ surj} \Rightarrow g \text{ surj} \end{array}}$$

__Bem.:__ Seien M, N endliche Mengen und
(endl viele Elemente)

$|M| :=$ Anzahl der Elemente von M

($|N|$ analog). Dann gelten für $f: M \to N$

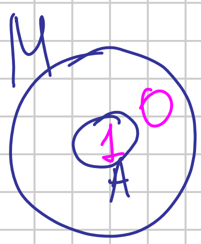
- f surj $\Rightarrow |N| \leq |M|$
- f inj $\Rightarrow |N| \geq |M|$
- f bij $\Rightarrow |N| = |M|$

(Warum?)

Bem. Die Menge aller Abb. von M nach N bezeichnet man mit $N^M := \{f : M \to N\}$

(M und N endlich $\Rightarrow |N^M| = |N|^{|M|}$ – warum?)

$\boxed{\text{Bsp}}$ Sei M eine Menge. Dann entspricht $\forall$ TM $A \subset M$ einer Funktion $f: M \to \{0,1\}$ mit



$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(f heißt charakteristische Funktion von A)

Man schreibt deshalb auch 2^M statt $\mathcal{P}(M)$ ($= \{0,1\}^M$).

Es gilt auch $|2^M| = 2^{|M|}$ für endliches M.

$\boxed{\text{Def. 2.9}}$ Seien M, N beliebige Mengen. Sie haben gleiche Kardinalität (oder Mächtigkeit), wenn es eine bij. Abb. $f: M \to N$ gibt.

Dann heißen M und N gleichmächtig.

Schreibweise: $|M| = |N|$

$\boxed{\text{Bsp}}$ 1) M, N endlich. Dann sind sie gleichmächtig

$\iff$ Die Anzahl der Elemente ist gleich.

2) $|\{1, 2, 3, \dots\}| = |\{2, 3, 4, \dots\}|$

Nimm $f(n) = n+1$

(Hilbertsches Hotel)